Műhelytanulmányok

Vállalatgazdaságtan Intézet

1093 Budapest, Fővám tér 8., 1828 Budapest, Pf. 489
(+36 1) 482-5424, fax: 482-5567, www.uni-corvinus.hu/vallgazd

A Neumann-modell, mint vállalati modell

Dobos Imre

91. sz. Műhelytanulmány
HU ISSN 1786-3031

2008. február

Budapesti Corvinus Egyetem
Vállalatgazdaságtan Intézet
Fővám tér 8.
H-1093 Budapest
Hungary

A Neumann-modell, mint vállalati modell

Dobos Imre
Logisztika és Ellátási Lánc Menedzsment tanszék
Vállalatgazdaságtan Intézet
H-1093 Budapesti Corvinus Egyetem Fővám tér 8.
Hungary

Abstract. The paper investigates the classical growth model of John von Neumann. There are only technologies in model of von Neumann. The aim of the paper is to rename technologies as firms and it is analyzed wheter there are equlibrium prices and quantities for firms to maximize the total profit. The paper rejects the classical assumption about the duality of prices, i.e. it is allowed a nonnegative profit of firms.
Keywords: Model of von Neumann, Growth model, Optimization, Mathematical programming.

Absztakt. A dolgozat a klasszikusnak tekinthető Neumann-féle növekedési modellt vizsgálja. Az eredeti Neumann-modellben expliciten vállalatok nem szerepelnek, csak technológiák, vagy eljárások. A dolgozat azt a célt tűzte ki, hogy az egyes technológiáknak vállalatokat feletessen meg, és azt vizsgálja, hogy az ilyen gazdaságban léteznek-e olyan megoldások, amelyek mellett a vállalatok maximalizálják a nyereségüket. Ennek vizsgálata közben el kell vetni a Neumann által feltételezett nempozitív nyereséget, ami a klasszikus közgazdaságtan dualitáson alapuló alapfeltételezése.
Kulcsszavak*:* Neumann-modell, Növekedési modell, Optimalizálás, Matematikai programozás.

1. Bevezetés

A Nemann-modellt tekintik ma növekedési és egyensúlyelméletek egyik előfutárának. Ugyanakkor ez a modell felfogható úgy is, mint a Koopmans (1951) által kifejlesztett lineáris tevékenységelemzés dinamikus változata. A modell széles körben kutatott nem csak az angolszász világban, hanem magyar matematikai közgazdaságtanban is, csak néhány dolgozatot említve: Medvegyev (1984), Móczár (1995), Móczár (1997), Zalai (1999), Zalai (2004).

A klasszikus Neumann-modellben n termék állítanak elő m eljárás, vagy technológia segítségével. A modell Neumann János által adott interpretációjában nem deríthető ki, hogy az eljárásokhoz vállalatokat, vagy ipari ágazatokat lehet-e rendelni, netán több eljárás testesíti meg a vállalatokat. Amint az a modellből is kitűnik, az eljárások csak negatív nyereség mellett működhetnek. Ez a vállalati gyakorlattal ellentétesnek tűnik.

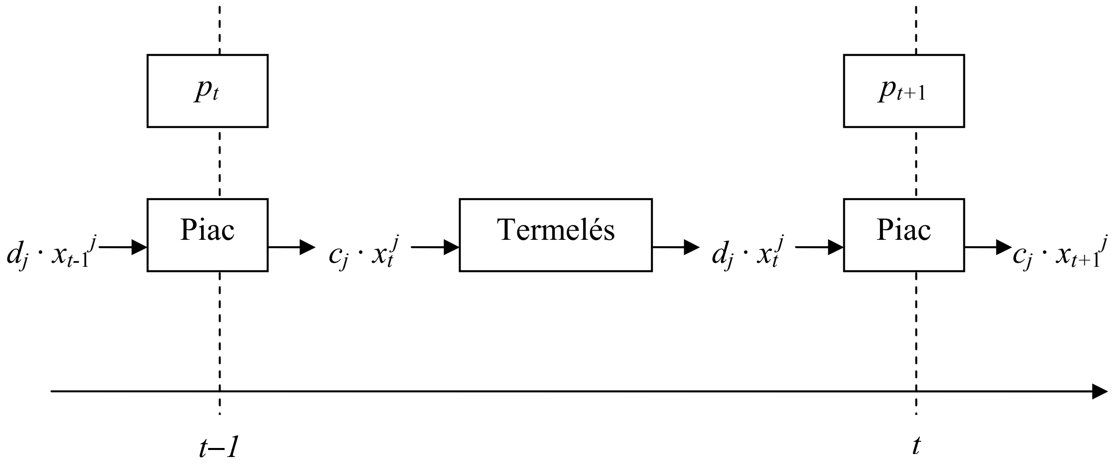
A dolgozat célja az, hogy a Neumann-modellnek egy új értelmezését adja. Az új értelmezésben tételezzük, fel, hogy a technológiák vállalatokat testesítenek meg. Arra építjük az modell ezen értelmezését, hogy egy eljáráshoz egy vállalat rendelhető. Ekkor a vállalatok ikertermékeket állítanak elő. Azt a modellváltozatot, amikor csak egy termék állítható elő az adott technológiával, Leontief-Neumann-modellnek nevezik.

A dolgozat a következő részekből fog állni. A következő részben a Neumann-modell egy dinamikus változatát mutatjuk be, aminek a stacionárius esetének egyensúlyi helyzetét vizsgálta Neumann (1945), majd Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) gazdaságilag racionális feltételekkel bővítette azt ki. Ezen az eredeti modellen mutatjuk meg, hogy ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy egy eljárás egy vállalatnak feleltethető meg, akkor a negatív nyereség feltételezése esetén a vállalatok nyereségüket csak akkor maximalizálhatnák, ha nem termelnének semmit. Ezért a nempozitív nyereség feltételezését el kell vetni, amennyiben az eljárásokat vállalatnak (ágazatnak) tekintjük. A harmadik fejezetben az átfogalmazott modellt vizsgáljuk. Amennyiben az eljárások vállalatoknak felelnek meg, akkor is azt kérdezhetjük, hogy milyen termelési szintek és árak mellett lesz a gazdaság egyensúlyban. Ennek a kérdésnek a megválaszolásához egy játékelméleti modellt vázolunk, és röviden érintjük a modell megoldhatóságát. Végül összegezzük az eredményeket.

2. A Neumann-modell dinamikus változata

A modell dinamikus változatát Asmanov (1984) munkája alapján ismertetjük. A modell alapmátrixait a Hegedűs és Zalai (1978) könyvében található mátrixos jelöléssekkel ismertetjük, a Neumann által használt hagyományosabb jelöléssel szemben.

A modell alapfeltételezései között szerepel, hogy a j-ik technológia egységnyi szintű alkalmazásához c_j nagyságú indulókészletre van szükség a termékekből, míg a termelési periódus végén egységnyi szintű alkalmazás esetén d_j készlet áll rendelkezésre a piaci cserére. A j-ik technológia input-output összefüggéseit tehát a (c_j, d_j) vektorpárral szemléltethetjük. A vektorok n dimenziósak, vagyis a gazdaságban n számú termék van, míg az eljárások száma m. Ha a j-ik technológia alkalmazási szintje a t-ik periódusban x_t^j, akkor az eljárás kezdeti készlete $c_j \cdot x_t^j$ és a periódus zárókészlete $d_j \cdot x_t^j$. Az eljárással előállított, és piacra vihető termékek mennyisége tehát $d_j \cdot x_t^j$. A t-ik termelési periódus végén egy pillanat alatt zajlik le a piaci csere a piacon kialakuló áron, amelyet a p_t nemnegatív n elemű vektorral jelölünk Az anyagáramlást a technológiák szempontjából az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. A Neumann-modell dinamikája a *j*-ik eljárásra
Forrás: Lancaster (1968)

Az egyes eljárások esetén a termékeket feloszthatjuk aszerint, hogy nyersanyagról, alapanyagról van-e szó, vagy végtermékről. Ezt az következő módon szemléltethetjük a j-ik technológiára. Az i-k termék végtermék, azaz a piacon értékesíthető termék, ha $d_{ij} > c_{ij}$. Ugyanakkor egy másik i-ik termék nyersanyag, ha $d_{ij} \leq c_{ij}$. Így a j-ik eljárással előállított termékek mennyisége a t-ik periódusban, ahol i végterméket jelöl $(d_{ij} - c_{ij})\cdot x_t^j$, míg a felhasználás $(c_{ij} - d_{ij})\cdot x_t^j$ az i nyersanyag esetén.

A piacon az eljáráshoz a felhasznált terméket kell beszerezni, pl. a t-ik időpontban az i-ik termék esetén $c_{ij} \cdot x_t^j - d_{ij}\cdot x_{t-1}^j$ nagyságban. Ugyanezen időpontban az értékesítés mennyisége $d_{ij}\cdot x_{t-1}^j - c_{ij} \cdot x_t^j$. Ezzel az eljárással két tevékenyégre bontottuk a Neumann-modellben megadott folyamatokat: termelésre és piaci cserére.

A vizsgált eljárással elért piaci bevételt a t-ik időpontban a $p_t \cdot (d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j)$ kifejezéssel írhatjuk le, ahol $p_t = (p_t^1, p_t^2,\ldots, p_t^n)$ vektor az árak n dimenziós vektora a t-ik időpontban. Ez csak a piaci árbevétel, de nem a nyereség. A nyereséget a periódusokra értelmezhetjük, ami a t-ik periódusra $(p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j) \cdot x_t^j$. Ezt azért írhatjuk ebben a formában, mert a nyereség az adott időpontban eladott termékek árbevétele csökkentve az előző időpontban beszerzett, és új termékké átalakított jószágok költségével. Az eredeti Neumann-modellben az eljárások nyeresége nempozitív, tehát $p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j \leq 0$.

Ezek után foglaljuk össze az egész gazdaságra a feltételeket. A naturális egyensúly feltétele a t-ik időpontban, hogy a piacra vitt termékek készlete a csere után nem lehet nagyobb, mint a csere előtt, vagyis $D \cdot x_{t-1} - C \cdot x_t \geq 0$, ahol $C = (c_1, c_2,\ldots,c_m)$ és $D = (d_1, d_2,\ldots,d_m)$ a technológiák egységnyi input és output készletének mátrixa. Az $x_t = (x_t^1, x_t^2,\ldots, x_t^m)$ vektor a termelési szintek m dimenziós vektorát jelöli a t-ik periódusban. A nempozitív nyereségre pedig a $p_{t+1} \cdot D - p_t \cdot C \leq 0$ összefüggés írható fel. Ha feltesszük, hogy a gazdaság tervezési időhorizontja T, akkor az induló készletek állománya $D \cdot x_0$, míg a terminális árbevétel összértéke $p_{T+1} \cdot D$ kell, hogy legyen. Ezen kívül A Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) által javasolt feltételeket a modellhez csatoljuk, ami azt jelenti, hogy minden termék szükséges legalább egy másik termék előállításához: $1 \cdot C > 0$, valamint minden termék előállítható legalább egy eljárással: $D \cdot 1 > 0$, ahol az 1 az összegző vektort jelöli.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy az előzőekben intuitívan kapott egyensúlyi feltételek egy lineáris programozási feladat primális és duális párjainak fele meg. A programozási feladat primális oldala a következő (1)-(4) feladat:

$$x_t \geq 0, (t = 1,2,\ldots,T), \quad (1)$$
$$C \cdot x_1 \leq D \cdot x_0, \quad (2)$$
$$-D \cdot x_{t-1} + C \cdot x_t \leq 0, (t = 2,3,\ldots,T), \quad (3)$$
$$p_{T+1} \cdot D \cdot x_T \to \max. \quad (4)$$

Ez a feladat később a turnpike elméletek kiindulópontja volt, amelyet Dorfmann, Samuelson és Solow (1958) munkájában található meg. Ezek szerint, ha T elég nagy, akkor az optimális pálya a Neumann-sugárhoz esik elég közel. (A Neumann-sugarat a következő bekezdésekben definiáljuk.)

A fenti feladat (5)-(8) duálisát az alábbi módon írhatjuk fel:

$$p_t \geq 0, (t = 1,2,\ldots,T), \quad (5)$$
$$p_t \cdot C - p_{t+1} \cdot D \geq 0, (t = 1,2,\ldots,T), \quad (6)$$
$$p_T \cdot C \geq p_{T+1} \cdot D, \quad (7)$$
$$p_1 \cdot D \cdot x_0 \to \min. \quad (8)$$

A két lineáris programozási feladat megoldható, mivel a C és D mátrixokra tett feltételek biztosítják egyrészt a primális feladat lehetséges megoldásainak halmaza korlátosságát, másrészt a duális feladat lehetséges megoldásainak halmaza alulról korlátos. Az optimális $(x_t, p_t)_{t=1}^{T}$ vektorpároknak ki kell elégíteniük a következő egyenlőségeket:

$$p_t \cdot (C \cdot x_t - D \cdot x_{t-1}) = 0, \quad (9)$$
$$(p_t \cdot C - p_{t+1} \cdot D) \cdot x_t = 0. \quad (10)$$

Vegyük most a stacionárius megoldását a problémának, vagyis legyen $x_{t+1} = \alpha \cdot x_t$, valamint $p_{t+1} = \beta \cdot p_t$, akkor a stacionárius pályát ki kell elégítenie a

$$D \cdot x \geq \alpha \cdot C \cdot x, \quad (11)$$
$$p \cdot D \cdot x = \alpha \cdot p \cdot C \cdot x, \quad (12)$$
$$p \cdot C \geq \beta \cdot p \cdot D, \quad (13)$$
$$p \cdot C \cdot x = \beta \cdot p \cdot D \cdot x, \quad (14)$$
$$p \cdot C \cdot x > 0 \quad (15)$$

összefüggésrendszernek, ami a Neumann-modell egyensúlyi helyzeteit foglalja össze. Az x és p vektorok nemnegatívak. A (11)-(15) egyensúlyi pályát a (α, x, β, p) négyessel írhatjuk le, ami Neumann-sugárnak neveznek. Ezekből a pályákból keressük a legnagyobb α növekedési pályájúakat.

Most áttérünk annak a vizsgálatára, hogy mi történhet akkor, ha az eljárást kicserélhetjük a vállalat szavakkal, és ezzel folytatjuk elemzésünket. Ekkor a Neumann-modellben fellelhető nempozitív nyereség feltételezését fel kall adni, mert a gazdálkodástanban a nempozitív nyereség a vállalat megszűnéséhez vezethet, amint azt a következő példa mutatja.

Ezek után tételezzük fel, hogy az így megalkotott vállalat célja a nyereség maximalizálása. Feltesszük azt is, hogy az árak egy adott T időhorizonton belül adottak, és az egyensúlyi árrendszerrel egyeznek meg. Nem foglalkozunk azzal, hogy milyen mechanizmus alakítja ki az árakat, amit p_t-vel jelölünk, t =1,2,…,T. A vállalat kumulált nyereségfüggvénye a vizsgált tervezési horizonton a következő alakot ölti:

$$\sum_{t=1}^{T} p_t \cdot \left(d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j\right) + p_{T+1} \cdot d_j \cdot x_T^j = \sum_{t=1}^{T} \left(p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j\right) \cdot x_t^j + p_1 \cdot d_j \cdot x_0^j . \quad (16)$$

A vállalat célja tehát olyan termelési szintek kiválasztása, amely mellett a nyereség maximális lesz, természetesen adott árak mellett. Tegyünk még egy feltételezést, ami az egyensúly naturális feltételéből következik:

$$-d_j \cdot x_{t-1}^j + c_j \cdot x_t^j \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_{t-1}^k - c_k \cdot x_t^k\right), (t = 1,2,..,T), \quad (17)$$

ami azt jelenti, hogy a piaci csere korlátozza a vállalat által beszerzett és eladott áruk mennyiségét. Mindez azt is jelenti, hogy a vállalat maximális nyeresége függ a többi vállalat által értékesített és beszerzett termékek mennyiségétől. Itt feltesszük, hogy a vállalat számára ismertek a más vállalatok által piacon realizált egyensúlyi mennyiségek.

A (16) és (17) feltételezések felhasználásával a (18)-(21) lineáris programozási feladatot definiáltunk, amely a következő formában írható fel:

$$x_t^j \ge 0, (t = 1,2,...,T) \quad (18)$$

$$c_j \cdot x_1^j \le d_j \cdot x_0^j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_0^k - c_k \cdot x_1^k\right) \quad (19)$$

$$-d_j \cdot x_{t-1}^j + c_j \cdot x_t^j \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_j \cdot x_{t-1}^k - c_j \cdot x_t^k\right), (t = 2,3,..,T) \quad (20)$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left(p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j\right) \cdot x_t^j \to \max . \quad (21)$$

A probléma megoldása könnyen megadható, ugyanis ha nempozitív a nyereség, akkor az optimális termelési szint minden periódusban zérus, azaz x_t^j = 0, (t = 1,2,…,T). Ezt szekvenciálisan láthatjuk be. Vizsgáljuk először az x_1^j optimális értékét. Mivel $d_j \cdot x_0^j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_0^k - c_k \cdot x_1^k\right)$ nemnegatív, ezért a baloldalon a p_1 árral történő szorzás értéke pozitív, ami azt jelenti, hogy a kifejezés x_1^j termelési szintben monoton növekvő. Ugyanakkor $p_2 \cdot d_j - p_1 \cdot c_j \le 0$, mivel az eredeti modell egyensúlyi árával számolunk. Ebből pedig indukcióval következik az állítás, vagyis ha az eljárást nyereségmaximalizáló vállalatnak tekintjük, akkor a klasszikus Neumann-modell megoldása az egyensúlyi ár ismeretében a nulla tevékenységi szint. Mindez azzal a következménnyel jár, hogy el kell vetni a nempozitív nyereség feltételezését a modellnek, ha az eljárásokat vállalatnak, ágazatnak tekintjük.

A továbbiakban feltétezzük, hogy nemnegatív nyereség fordulhat elő: $p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j \geq 0, (t = 1,2,...,T), (j = 1,2,...,m)$. Ez a feltételezés azt mondja ki, hogy egységnyi szintű működés esetén a t-ik periódusra a termelési időszak végi készlet értékének nagyobbnak kell lennie, mint az inputként szereplő készletek értéke. Ha ezt a feltételt nem tennénk meg, akkor a nempozitivitás miatt az optimális szintek értéke 0 lenne, amit értelmezni nem tudnánk.

A feltételezés ellentmondásban van a klasszikus Neumann-modell azon feltételezésével, hogy nempozitív nyereséget értelmezünk. Azonban vállalati modellként tekintve Neumann növekedési modelljét az eredeti feltételezés nem lenne -, amint láttuk - tartható.

3. A Neumann-modell átfogalmazása

A modellt a fentiek ismeretében a következő módon írhatjuk fel, mint a (22)-(27) optimalizálási feladatot:

$$x_t \geq 0, p_t \geq 0 \ (t = 1,2,\ldots,T), \tag{22}$$

$$C \cdot x_1 \leq D \cdot x_0, \tag{23}$$

$$-D \cdot x_{t-1} + C \cdot x_t \leq 0, (t = 2,3,\ldots,T), \tag{24}$$

$$-p_t \cdot C + p_{t+1} \cdot D \geq 0, (t = 1,2,\ldots,T), \tag{25}$$

$$p_T \cdot C \geq p_{T+1} \cdot D, \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \cdot d_1 \cdot x_0^1 + \sum_{t=1}^{T} (p_{t+1} \cdot d_1 - p_t \cdot c_1) \cdot x_t^1 \\ p_1 \cdot d_2 \cdot x_0^2 + \sum_{t=1}^{T} (p_{t+1} \cdot d_2 - p_t \cdot c_2) \cdot x_t^2 \\ \ldots \\ p_1 \cdot d_m \cdot x_0^m + \sum_{t=1}^{T} (p_{t+1} \cdot d_m - p_t \cdot c_m) \cdot x_t^m \end{bmatrix} \rightarrow opt, \tag{27}$$

ahol $D \cdot x_0$ az ismert készletállomány a tervezési periódus elején, valamint $p_{T+1} \cdot D$ egységnyi kibocsátás értéke a tervezési periódus legvégén. A feladat így annak a $\{x_t\}_{t=1}^T$ termelési szerkezetnek és $\{p_t\}_{t=1}^T$ árrendszernek a felkutatása, amellett a vállalatok maximalizálják a nyereségüket. A vázolt probléma tehát egy játékelméleti feladat megoldását igényli. Matematikailag vizsgálva a problémát egy kvadratikus többcélfüggvényes matematikai programozási feladatot nyertünk. (Lásd pl. Krekó (1972) művét.) Az ilyen feladatot visszavezethetjük egy egy célfüggvényes matematikai programozási feladattá, amennyiben a célvektort egy $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ nemnegatív vektorral szorozzuk meg, amelyet az összegző vektorral szorozva éppen egyet kapunk, azaz $1'\lambda = 1$. A többcélfüggvényes programozás témaköréből ismert, hogy a megoldások halmaza nemkonvex, ugyanis az összes lehetséges λ vektorra meg kellene oldanunk a problémát. A továbbiakban más utat választunk.

A feladat megoldását egyszerűsítsük arra az esetre, amikor a gazdaságban képződő összes nyereséget maximalizáljuk, azaz az előbbi feladat célfüggvénye a következő alakot veszi fel:

$$\sum_{t=1}^{T}\left(p_{t+1}\cdot D - p_t \cdot C\right)\cdot x_t + p_1 \cdot D \cdot x_0 \to \max .$$

Ekkor $\lambda_i = \frac{1}{m}$. A feladatot még egyszerűbb formában is felírhatjuk, ha az ár vektorokat és a tevékenységi szintek vektorát, valamint a mátrixokat összevonjuk:

$$\widetilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{T-1} \\ x_T \end{bmatrix}, \quad \widetilde{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_{T-1} \\ p_T \end{bmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -D & C & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & C & \\ 0 & 0 & \ldots & -D & C \end{bmatrix}.$$

Ennek segítségével a (22)-(27) probléma újabb, összevontabb alakja:

$$\widetilde{x} \geq 0,\ \widetilde{p} \geq 0, \tag{28}$$
$$\widetilde{C} \cdot \widetilde{x} \leq a, \tag{29}$$
$$\widetilde{C}' \cdot \widetilde{p} \leq b, \tag{30}$$
$$-\widetilde{p} \cdot \widetilde{C} \cdot \widetilde{x} + a \cdot \widetilde{x} + b \cdot \widetilde{p} \to \max \tag{31}$$

ahol

$$a = \begin{bmatrix} D \cdot x_0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ D' \cdot p_{T+1} \end{bmatrix}.$$

A vesszővel a transzponáltat jelöltük. Mivel az így felvetett probléma egy kvadratikus programozási feladat, ezért még ez utóbbi feladatot is tovább egyszerűsíthetjük a (32)-(34) alakra:

$$y \geq 0, \tag{32}$$
$$E \cdot y \leq c, \tag{33}$$
$$-\frac{1}{2} \cdot y' \cdot E \cdot y + c \cdot y \to \max \tag{34}$$

ahol

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C} \\ \tilde{C}' & 0 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Ennek a feladatnak a megoldása Lagrange-függvénnyel nem ad olyan szimmetrikus megoldást, mint a lineáris programozás dualitási eredményei, ezért eltekintünk annak vizsgálatától. A megoldás létezésének elemzésétől is eltekintünk, mert a mátrixokra tett Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) feltételezések garantálják a (32)-(34) programozási feladat megoldását. Foglalkozzunk inkább e feladat stacionárius megoldásaival.

A stacionárius megoldás legyen újra $x_{t+1} = \alpha \cdot x_t$, valamint $p_{t+1} = \beta \cdot p_t$. Ekkor

$$D \cdot x \geq \alpha \cdot C \cdot x, \tag{35}$$
$$p \cdot C \leq \beta \cdot p \cdot D. \tag{36}$$
$$p \cdot C \cdot x > 0 \tag{37}$$

A p árvektor és az x termelési szintek vektora ebben az esetben is nemnegatív. Ez a modellváltozat tehát három ponton különbözik a klasszikus (11)-(15) Neumann-modelltől. Hiányoznak belőle a (12) és (14) dualitási tulajdonságok, valamint a (13) összefüggésben az egyenlőtlenség előjele megfordult.

A modell megoldása így azon (α, x, β, p) egyensúlyi pályák felkutatása, amelyekre α maximális, és β minimális. (Ha β minimális, akkor $\frac{1}{\beta}$-nak maximálisnak kell lennie.) Az egyensúly létezését Hegedűs és Zalai (1978) bizonyították. Ebben az esetben azonban a duális oldalról is hasonlóan bizonyítható az egyensúly létezése.

4. Összegzés

A dolgozat abból a feltételezésből indult ki, hogy a Neumann-modell eljárásainak egy-egy vállalat (iparág) feleltethető meg. Feltételezve, hogy az így definiált vállalatok célja a nyereség maximalizálása, azt kérdeztük, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie az egyensúly teljesüléséhez. Arra az eredményre jutottunk, hogy a Neumann-modell eredeti feltételei közül kettő továbbra is teljesül, nevezetesen a naturális egyensúly, valamint az időszak elejei készletek értékének pozitivitása, de az áregyensúlynak meg kell fordulnia, vagyis nemnegatív nyereségek kellenek, hogy legyenek a modellben. Az új formában a dualitási feltételekről is le kell, hogy mondjunk.

További kutatást igényel, hogy α és β milyen feltételek mellett lehetnek azonosak. Ezenkívül azt is kérdezhetjük, hogy hogyan alakul az egyensúly stacionárius feltétele, ha egy vállalat több eljárással (technológiával) rendelkezik.

Hivatkozások

1. Asmanov, Sz. A. (1984): Vvegyenyije v matyematyicseszkuju ekonomiku, Nauka, Moszkva
2. Dorfman, R., Samuelson, P.A., Sollow, R.M. (1958): Linear programming and economic analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London
3. Hegedűs Mikós, Zalai Ernő (1978): Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
4. Kemeny, J.G., Morgenstern, O., Thompson, G.L. (1956): A generalization of von Neumann's model of an expanding economy, Econometrica 24, 115-135
5. Koopmans, T.C. (Eds.) (1951): Activity analysis of production and allocation, John Wiley and Sons, New York
6. Krekó Béla (1972): Optimumszámítás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
7. Lancaster, K. (1968): Mathematical economics, Collier-Macmillan Lmited, London
8. Medvegyev Péter (1984): A general existence theorem for von Neumann economic growth model, Econometrica 52, 963-974
9. Móczár József (1995): Reducible von Neumann models and uniqueness, Metroeconomica 46, 1-15
10. Móczár József (1997): Non-uniqueness through duality in the von Neumann growth models, Metroeconomica 48, 280-299
11. Neumann, J. von: (1945): A model of general economic equlibrium, Review of Economic Studies 13, 1-9
12. Zalai Ernő (1999): A közgazdaságtan metodológiájáról és a matematikai közgazdaságtanról a Neumann-modell ürügyén, Közgazdasági Szemle XLVI., 600-628
13. Zalai Ernő (2004): The von Neumann model and the early models of general equlibrium, Acta Oeconomica 54, 3-38