Műhelytanulmányok
Vállalatgazdaságtan Intézet

1093 Budapest, Fővám tér 8., 1828 Budapest, Pf. 489
(+36 1) 482-5424, fax: 482-5567, www.uni-corvinus.hu/vallgazd

Variációszámítás és a Leontief-modell

Dobos Imre

94. sz. Műhelytanulmány
HU ISSN 1786-3031

2008. június

Budapesti Corvinus Egyetem
Vállalatgazdaságtan Intézet
Fővám tér 8.
H-1093 Budapest
Hungary

Variációszámítás és a Leontief-modell

Dobos Imre
Logisztika és Ellátási Lánc Menedzsment tanszék
Vállalatgazdaságtan Intézet
H-1093 Budapesti Corvinus Egyetem Fővám tér 8.
Hungary

Absztrakt. A dolgozat a variációszámítás gazdasági alkalmazásaiból mutat be hármat. Mindhárom bemutatandó alkalmazás a Leontief-modellen alapszik. Az optimális pályák vizsgálata után arra keressük a választ, hogy az Euler-Lagrange differenciálegyenlet rendszerrel kapott megoldások valóban optimális megoldásai-e a modelleknek.

Kulcsszavak: Dinamikus Leontief-modell, Variációszámítás, Optimális pályák

Abstract. This paper analyzes economic applications of calculus of variations. Three used models are based on dynamic Leontief model. After calculations of optimal solutions and paths, we ask whether the optimal solutions constructed with help of Euler-Lagrange differetial equations are really optimal solutions of the offered models.

Kulcsszavak: Dynamic Leontief model, Calculus of variations, Optimal paths

1. Bevezetés

A dolgozatban három variációszámítási feladatot mutatunk be, amelyeket a Leontief-modellből származtatott Bródy (1980, 2002), valamint Ábel (1981). A célunk mindezzel a variációszámítás alkalmazhatóságának vizsgálata lineáris, vagy annak tűnő modellekben. A variációszámítás alkalmas arra, hogy időfüggő, azaz dinamikus megoldásokat állítson elő közgzdasági problémákra.

Az első modell Bródy András (1980) „Ciklus és szabályozás” című könyvéből származik, amelyben a szerző rendszerének mozgásegyenleteit vezeti le. Az itt optimalizálandó funkcionál az időben összegzett összes nyereségeket tartalmazza, eltekintve attól, hogy az ágazatok különbözőek. Ez a modell az árak és a termelési szintek nagyságát keresi, amelyek mellett maximális az összes jövedelem a gazdaságban.

A következő dinamikus probléma, amely variációszámítással kezelhető, Ábel (1981) cikke. A dolgozat egy általános modellben vizsgálja a gazdaságban jelenlévő munkamegtakarítási elvet egy dinamikus modellben. Az általános modell egy alkalmazásaként a zárt dinamikus Leontief-modell tekinti a szerző mintának. Ezt a lineáris modellt is újravizsgáljuk.

Az utolsó modellben újra Bródy (2002) egy munkáját állítjuk a vizsgálat középpontjába. Bródy e munkájában a ciklust tanulmányozta, és Goodwin ciklusmodelljeinek szellemében egy lineáris differenciálegyenletet tartalmazó modellben mutatja be a ciklus kialakulását és mozgásait. E differenciálegyenletből származtatható aztán egy optimalizálási feladat, ahol a rendelkezésre álló és beruházott termékek különbségét kívánjuk optimalizálni.

E három különböző modell a variációszámításhoz (Kósa (1970), Leitmann (1981)), vagy optimális irányításhoz (Pontrjagin, Boltjanszkij (1968)) vezet. A variációszámítással nyerhető megoldást az Euler-Lagrange differenciálegyenlet szolgáltatja, míg optimális irányítás esetén a Pontrjagin-féle maximumelv ad megoldást. Pontrjagin és szerzőtársai (1968) bebizonyították, hogy minden variációszámítási feladat átalakítható optimális irányítási feladattá. Sokan tartják az optimális irányítást a modern variációszámításnak is. A variációszámításban azonban nehéz azt megállapítani, hogy az Euler-Lagrange differenciálegyenlettel kapott megoldás valóban optimális-e. Az előbb ismertetett három modellben ezt fogjuk tesztelni. Vizsgálódásainkat az előbb vázolt sorrendben hajtjuk végre.

2. A nyereségmaximalizáló modell

Bródy Ciklus és szabályozás (1980) könyvében tett kísérletet a Goodwin-féle ciklusmodell Leontief-féle modellekre történő alkalmazására. A ciklust a gazdaság szereplőinek nyereségmaximalizáló viselkedéséből vezette le. E modell nyereség funkcionálja három tényezőből áll:

- a realizált nyereség $p(t)\cdot(I-A)\cdot x(t)$ alakban felírható része,
- a készletek és befektetett eszközök árváltozásából eredő nyereség, amely $\dot{p}(t)\cdot B\cdot x(t)$ alakú és a
- termelés bővítésére fordított eszközök $p(t)\cdot B\cdot \dot{x}(t)$ költsége,

ahol az A nxn-es nemnegatív mátrix a folyó ráfordítások mátrixa, a B nxn-es mátrix a tőkebefektetések nemnegatív mátrixa, az $x(t)$ vektor az ágazatok termelését, míg $p(t)$ az árvektorokat tartalmazza. A termelési szint és az árvektor időszerinti deriváltját jelölje a fölöttük lévő pont. Feltételezzük, hogy az A mátrixnak létezik Leontief-inverze. (Bródy (1969)) (Az ismertetett mátrixokat a következő két modellben is hasonló értelemben használjuk majd.)

E három tényezőből áll elő az időben kumulált nyereség:

$$I(p(t),x(t)) = \int_0^T \left[p(t)\cdot(I-A)\cdot x(t) + \dot{p}(t)\cdot B\cdot x(t) - p(t)\cdot B\cdot \dot{x}(t)\right]dt\,, \qquad (1)$$

amit maximalizálni szeretnénk.

A cél tehát a gazdaságban képződő összes nyereség maximalizálása. Alakítsuk át az (1) funcionálban szereplő integrandust az alábbi alakra:

$$L(p(t),x(t),\dot{p}(t),\dot{x}(t)) = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}p(t) & x(t)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & I-A\\ I-A' & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p(t)\\ x(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}p(t) & x(t)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -B\\ B' & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{p}(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}.$$

Ez az alak azért lesz hasznos, mert ebből az Euler-Lagrange differenciálegyenlet rendszert könnyebben származtathatjuk. Alkalmazzuk most az optimalitás szükséges feltételét:

$$\frac{\partial L}{\partial(p(t),x(t))}(p(t),x(t),\dot{p}(t),\dot{x}(t)) = \begin{bmatrix}0 & I-A\\ I-A' & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p(t)\\ x(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -B\\ B' & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{p}(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix},$$

valamint

$$\frac{\partial L}{\partial(\dot{p}(t),\dot{x}(t))}(p(t),x(t),\dot{p}(t),\dot{x}(t)) = \begin{bmatrix}0 & B\\ -B' & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p(t)\\ x(t)\end{bmatrix},$$

amiből az Euler-Lagrange differenciálegyenlet rendszert felhasználva

$$\frac{\partial L}{\partial(p(t),x(t))}(p(t),x(t),\dot{p}(t),\dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(\dot{p}(t),\dot{x}(t))}(p(t),x(t),\dot{p}(t),\dot{x}(t)) = 0\,,$$

a következő lineáris differenciálegyenlet rendszert kapjuk az optimum szükséges feltételeként:

$$\begin{bmatrix}0 & I-A\\ I-A' & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p(t)\\ x(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -B\\ B' & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{p}(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & B\\ -B' & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{p}(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

ami egyszerű átrendezéssel

$$(I-A)\cdot x(t) - 2\cdot B\cdot \dot{x}(t) = 0\,,$$

$$(I - A') \cdot p(t) + 2 \cdot B' \cdot \dot{p}(t) = 0 .$$

Az ilyen típusú differenciálegyenlet rendszerek megoldását mutatta be Dobos (2007). Szorozzuk most be az első egyenletet a $p(t)$ árvektorral, míg a másodikat a tevékenységi szintek $x(t)$ vektorával. Ekkor

$$p(t) \cdot (I - A) \cdot x(t) - 2 \cdot p(t) \cdot B \cdot \dot{x}(t) = 0 ,$$

és

$$x(t) \cdot (I - A') \cdot p(t) + 2 \cdot x(t) \cdot B' \cdot \dot{p}(t) = 0 .$$

Összegezve a két egyenlőséget kapjuk, hogy

$$2 \cdot \left[p(t) \cdot (I - A) \cdot x(t) + x(t) \cdot B' \cdot \dot{p}(t) - p(t) \cdot B \cdot \dot{x}(t) \right] = 0 .$$

Ez azt jelenti, hogy az integrandusnak a stacionárius megoldásban zérussal kell azonosnak lennie, vagyis

$$I\left(p^s(t), x^s(t)\right) = 0 ,$$

ahol $(p^s(t), x^s(t))$ jelöli a stacionárius megoldást.

Ezt az eredményt kapta Bródy (1980) is, jóllehet formálisan nem a variációszámítás Euler-Lagrange-féle szükséges feltételét alkalmazta. Ezen a formán végezte aztán a ciklus alakját vizsgáló analízisét is. Feltesszük a kérdést, hogy valóban az lesz az optimális megoldása az (1) variációszámítási feladatnak.

Azt fogjuk megmutatni egy numerikus számpéldán, hogy ez nem lehet optimális, csak stacionárius megoldás, tehát a problémát tovább kell vizsgálni. A numerikus példa adatai Bródy (2004) dolgozatából származnak. Legyenek a rendszer mátrixai

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a következő két differenciálegyenlet rendszert kell megoldani az optimumot adó trajektóriák előállításához:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0{,}5],$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$2\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot p_1(t)\\ \dot p_2(t)\\ \dot p_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}4 & -0{,}1 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}3\\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\\ p_3(t)\end{bmatrix},\quad t\in[0{,}5],$$

$$\begin{bmatrix}p_1(0)\\ p_2(0)\\ p_3(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Ezek megoldása

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=e^{\frac{1}{60}\cdot t}\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\\ p_3(t)\end{bmatrix}=^{\frac{1}{60}\cdot t}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad t\in[0{,}5],$$

vagyis ebben az esetben a megoldások a Neumann-sugáron fekszenek rajta, vagyis nemnegatívak. Ugyanakkor, ha veszünk egy olyan lehetséges megoldást, amely konstans a tervezési időhorizont mentén:

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\\ p_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad t\in[0{,}5],$$

akkor tudjuk, hogy $\dot x(t)=\dot p(t)=0$. Ebből következik, hogy

$$I(p(t),x(t))=\int_0^5[p(t)\cdot(I-A)\cdot x(t)]dt=\int_0^5 1{,}3\,dt=6{,}5.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az Euler-Lagrange differenciálegyenlet rendszert kielégítő termelési és ár vektorok nem adnak maximális összes nyereséget a gazdaságra nézve, mert létezik ennél legalább egy jobb trajektória. Ez azt is jelenti, hogy a maximális nyereség eléréséhez más közgazdasági feltételeket is teljesítenie kell a gazdaságnak. Ennek a vizsgálatától most eltekintünk.

3. A munkamegtakarító elv

Ábel (1981) dolgozatában a marxi munkaérték elmélet alapján mutat be egy variációszámítási modellt. A modell alakja a következő:

$$L(x(t))=\int_0^T[p(t)\cdot(I-A)\cdot x(t)-p(t)\cdot B\cdot\dot x(t)]dt\to extremal.$$

Ez a modellforma annyiban különbözik a Bródy (1980) által javasolttól, hogy itt a papirosprofit nem szerepel, és a profitmaximalizálás helyett a munkamegtakarítást kell minimalizálni. A modell felállításakor feltételezzük, hogy az árak $p(t)$ vektora ismert.

Az Euler-Lagrange-féle differeciálegyenlet rendszer alkalmazhatjuk a feladatra, amint azt Ábel (1981) is tette. Az extrémum szükséges feltétele tehát

$$(I - A')\cdot p(t) + B' \cdot \dot{p}(t) = 0,\ t \in [0, T]. \tag{2}$$

Ezzel az összefüggéssel tehát csak az árakra tehetünk feltételezést, és nem a termelési szintre. Mivel az árak exogén változók, ezért azok előre ismertek. Az árakra viszont ekkor a $p(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \overline{p}$ összefüggés tehető, ami Bródy (1969) könyvében is megtalálható. A λ érték és $\overline{p}$ vektor a $(I - A')\cdot \overline{p} + \lambda \cdot B' \cdot \overline{p} = 0$ sajátérték feladat nemnegatív megoldásai. Hogyan alakulna ugyanakkor ez a szükséges feltétel, ha az árvektor nem teljesítené a (2) differenciáegyenlet rendszert? Tételezzük most fel, hogy a $p(t)$ árvektor nem elégíti ki a fenti differenciálegyenlet rendszert, de időben differenciálható függvény. Ekkor az integrált az alábbiak szerint alakíthatjuk át:

$$\int_0^T \left[p(t)\cdot(I - A)\cdot x(t) - p(t)\cdot B \cdot \dot{x}(t)\right]dt = \int_0^T \left[\{p(t)\cdot(I - A) + \dot{p}(t)\cdot B\}\cdot x(t)\right]dt - \left[p(t)\cdot B \cdot x(t)\right]_0^T.$$

A minimalizálást így csak akkor tudjuk elvégezni, ha minden időpontban létezik a következő feladatnak minimuma:

$$\min_{x(t)\geq 0}\left[\{p(t)\cdot(I - A) + \dot{p}(t)\cdot B\}\cdot x(t)\right].$$

A minimum feladat megoldása a következő lehet:

$$x^o(t) = \begin{cases} 0 & p(t)\cdot(I - A) + \dot{p}(t)\cdot B \geq 0 \\ +\infty & p(t)\cdot(I - A) + \dot{p}(t)\cdot B < 0 \end{cases},$$

ami azt jelenti, hogy amennyiben a termelési szintek vektora felülről nem korlátos, akkor csak egy speciális trajektória létezik. E probléma áthidalása további megfontolásokat igényel.

4. Mozgásegyenletek és variációszámítás

A most felállítandó modell a bővített újratermelés ciklikus pályáját vizsgálja. (Bródy (1997)) A következő mátrixaink és változóink lesznek most, amelyek a gazdaság ciklusait generálják:

$$S = \begin{bmatrix} I & B \\ B' & I \end{bmatrix},\quad K = \begin{bmatrix} 0 & -(I - A) \\ I - A' & 0 \end{bmatrix},\quad z(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ x(t) \end{bmatrix}.$$

A gazdaság mozgásegyenlete ekkor

$$S \cdot \dot{z}(t) = K \cdot z(t). \tag{3}$$

A Bródy (2002) által felvázolt variációszámítási modell alakja az alábbi módon alakul:

$$\int_0^T \left[z(t)' \cdot K \cdot z(t) - z(t)' \cdot S \cdot \dot{z}(t)\right] dt \to \max .$$

Az integrandus ebben az esetben a rendelkezésre álló és beruházott többlet egyenlege, amit maximalizálni kell. Kisebb átalakítások után:

$$\begin{bmatrix} p(t)' & x(t)' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -(I-A) \\ I-A' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ x(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p(t)' & x(t)' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & B \\ B' & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{p}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} =$$
$$-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d}{dt} p(t)' \cdot p(t) + \frac{d}{dt} x(t)' \cdot x(t)\right] - \frac{d}{dt} p(t)' \cdot B \cdot x(t)$$

Mindezek alapján

$$\int_0^T \left[z(t)' \cdot K \cdot z(t) - z(t)' \cdot S \cdot \dot{z}(t)\right] dt = -\int_0^T \left\{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d}{dt} p(t)' \cdot p(t) + \frac{d}{dt} x(t)' \cdot x(t)\right] + \frac{d}{dt} p(t)' \cdot B \cdot x(t)\right\} dt =$$
$$-\left[\frac{1}{2} \cdot p(t)' \cdot p(t) + \frac{1}{2} \cdot x(t)' \cdot x(t) + p(t)' \cdot B \cdot x(t)\right]_0^T =$$
$$\left[\frac{1}{2} \cdot p(0)' \cdot p(0) + \frac{1}{2} \cdot x(0)' \cdot x(0) + p(0)' \cdot B \cdot x(0)\right] - \left[\frac{1}{2} \cdot p(T)' \cdot p(T) + \frac{1}{2} \cdot x(T)' \cdot x(T) + p(T)' \cdot B \cdot x(T)\right]$$

Ez azt is jelenti, hogy a feladat ebben a formájában egy azonosság, az optimális pályára semmilyen következtetést tenni nem tudunk.

Vizsgáljuk most meg a (2) lineáris differenciálegyenlet rendszer lehetséges megoldásait. Ehhez a következő sajátérték feladatot kell megoldanunk:

$$\lambda \cdot S \cdot z = K \cdot z .$$

Ehhez hasonló sajátérték feladatot vizsgált Dobos (2007) arra az esetre, amikor az S mátrix szinguláris. Ebben a feladatban is elképzelhető, hogy a mátrix szinguláris, mégpedig akkor, ha az $I + B' \cdot B$ mátrix szinguláris. Most azt fogjuk belátni, hogy ha egy λ_1 sajátértéke a problémának, akkor a $-\lambda_1$ is sajátértéke. Ez azt is jelenti, hogy a sajátártékek vagy páronként valósak, vagy páronként tisztán képzetesek.

Tételezzük fel, hogy λ_1 sajátérték és a hozzátartozó sajátvektor z_1. Ekkor

$$\lambda_1 \cdot S \cdot z_1 = K \cdot z_1 .$$

Vegyük most ennek az egyenletnek a transzponáltját:

$$\lambda_1 \cdot z_1' \cdot S' = z_1' \cdot K' .$$

Mivel az S mátrix szimmetrikus, ezért $S' = S$, valamint a K mátrix ferdén szimmetrikusságából következik, hogy $K' = -K$. Használjuk most ezt a két összefüggést az előbbi, transzponált feladatra:

$$\lambda_1 \cdot z_1^{'} \cdot S = -z_1^{'} \cdot K ,$$

ami átalakítás után

$$-\lambda_1 \cdot z_1^{'} \cdot S = z_1^{'} \cdot K .$$

Ez tehát azt jelenti, hogy ha λ_1 sajátértéke a problémának, akkor $-\lambda_1$ is az. Ráadásul ha z_1 jobb oldali sajátvektor, akkor $z_1^{'}$ baloldali sajátértéke a feladatnak.

5. Összefoglalás

A dolgozatban három modellt tekintettünk át, amely a Leontief-modellre épülő gazdasági elemzések és a variációszámítás kapcsolatát vizsgálták. Azt kaptuk, hogy az ilyen modellekben pótlólagos feltételek szükségesek az optimális trajektóriák megállapításához. A pótlólagos feltételezések felkutatása további vizsgálatokat igényel.

Hivatkozások

1. Ábel, I. (1981): The labor saving principle with an application to the Leontief-type economies, International Economic Review 22, 377-383
2. Bródy, A. (1969): Érték és újratermelés, Közgazdasági és Jogi könyvkiadó, Budapest
3. Bródy András (1980): Ciklus és szabályozás: Kísérlet a klasszikus piac- és cikluselmélet matematikai modelljének megfogalmazására, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
4. Bródy András (1997): A piac és az egyensúly: A neumanni és kvázi-hamiltoni rendszer, Közgazdasági Szemle XLIV., 738-756
5. Brody, A. (2000): A wave matrix, Structural Change and Economic Dynamics 11, 157-166
6. Bródy András (2002): Bevezetés a mozgáselméletbe, Közgazdasági Szemle XLIX., 93-104
7. Bródy, A. (2004): Near equilibrium: A research report on cyclic growth, Aula, Budapest
8. Bródy András (2007): A ciklus oka és hatása, Közgazdasági Szemle LIV., 903-914
9. Dobos Imre (2007): Egy megjegyzés Bródy András: Leontief zárt dinamikus modellje című dolgozathoz, Közgazdasági Szemle LIV., 1004-1011
10. Kósa András (1970): Variációszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest
11. Leitmann, G. (1981): Calculus of variations, Plenum Press, new York, London
12. Pontrjagin, L. Sz., Boltyanszkij, V.G. (1968): Optimális folyamatok elmélete, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest