Budapest University of Economic Sciences and Public Administration

Műhelytanulmányok
Vállalatgazdaságtan Tanszék

1053 Budapest, Veres Pálné u. 36., 1828 Budapest, Pf. 489
☎ (+36 1) 482-5901, fax: 482-5844, www.uni-corvinus.hu/vallgazd

Vállalatgazdaságtan Tanszék

Az újrahasznosítás hatása a gazdasági sorozatnagyságra

Dobos Imre – Knut Richter

26. sz. Műhelytanulmány
HU ISSN 1786-3031

2002. október

Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem
Vállalatgazdaságtan Tanszék
Veres Pálné u. 36.
H-1053 Budapest
Hungary

Az újrahasznosítás hatása a gazdasági sorozatnagyságra

Dobos Imre

Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem
Vállalatgazdaságtan Tanszék
H-1053 Budapest
Veres Pálné u.36
Magyarország
imre.dobos@bkae.hu

és

Knut Richter

Europa-Universität Viadrina
Grosse Scharrnstr. 59.
D-15230 Frankfurt (Oder)
Németország
richter@euv-frankfurt-o.de

Összefoglalás

A dolgozat egy javítási és hulladékkezelési, reverz logisztikai problémát mutat be. Egy termék iránti keresletet termeléssel és visszaérkező, használt termékek javításával lehet kielégíteni. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy a releváns költségek minimalizálása mellett hogyan ossza meg a vállalat erőforrásait a termelés és a javítás között. A megoldáshoz a szerzők a gazdasági sororzatnagyság modellt alkalmazzák.

Kulcsszavak: Gazdasági sorozatnagyság modell, Termelés, Újrafelhasználás, Hulladékkezelés, Költségminimalizálás

Abstract

The aim of the paper is to investigate a reverse logistics model. The demand can be satisfied by production of new items and/or by repair of used returned items. The decision-maker minimizes all relevant costs, i.e. the sum of EOQ- and non-EOQ-related costs. It is asked whether pure or mixed strategies minimize the total costs.

Keywords: EOQ model, Production, Recycling, Waste disposal, Cost minimization

1. Bevezetés

Reverz logisztikán a logisztika azon ágát értjük, amely a termelési/fogyasztási folyamatból kivont, de újrahasználható anyagok kezelését és újrafeldolgozását öleli fel. Ilyen újrafelhasználás lehet pl. a recycling, vagy alkatrészek javítása. Az újrafelhasználással környezettudatos anyaggazdálkodás és/vagy logisztika érhető el. Nemzetgazdasági szempontból ez olyan előnyökkel jár, mint a környezeti terhelés csökkentése a termelési folyamatba történő visszavezetéssel, de ezzel az újrafelhasználással a természeti erőforrások kitermelése is csökkenthető, ami a következő nemzedékek rendelkezésére álló erőforrásokat kimélheti a túlzott fogyasztástól.

Jelen dolgozatban egy optimális sorozatnagyság modell keretében mutatjuk be, hogy a reverz logisztika hogyan képes a környezettel szembeni tudatosságot érvényre juttatni, ezzel az erőforráskímélés nemzetgazdasági célját a vállalati szintre leképezni. A vizsgálandó modell a termelési folyamatban egy terméket (konténerek, göngyölegek/sörös ládák stb.) elemez. A terméket (itt konténer) a vállalat egy műhelye állítja elő vagy a használtakat javítja, hogy abban pl. alkatrészeket szállítsanak egy termelési fázis (másik műhely) számára. Az üres konténereket a felhasználás helyen tárolják, majd a termelési periódus végén az összegyűjtött konténereket visszaszállítják a gyártó-javító üzembe. A termelő üzemben születik döntés arról, hogy a konténerek mennyi részét gyűjtik javításra és mekkora hányadát kezelik a vállalaton kívül hulladékként. (Ez a hulladékkezelés jelenthet újrafelhasználást egy másik vállalat számára. Pl. ha a konténer vasból készült, akkor egy kohóban azt beolvaszhatják.) A vizsgált szituációban felmerülő kérdések a következők lehetnek: A konténerek hány százalékát javítsák meg, valamint milyen tételnagyságokkal folyjon a konténerek előállítása és javítása, ha a döntéshozó célja a releváns költségek minimalizálása.

A felvetett problémát először Richter [7] vizsgálta. Modelljét két szinten oldotta meg. Az első szinten a minimális készletezési átlagköltségek melletti termelési és javítási sorozatnagyságok és a tételszámok megállapítása volt a cél. A második szinten lineáris termelési, javítási és hulladékkezelési költségek bevezetése esetén a készletezési és a lineáris „kezelési“ költségek összegének minimalizálásával az optimális hulladékkezelési ráta meghatározása volt a cél. Az alapmodell megoldása során több matematikai szempontból érdekes probléma állt elő, amelyet a szerző(k) vizsgáltak. Ilyen probléma a készletezési költségfüggvény tulajdonságainak leírása [8], vagy a második szinten megjelenő feladat megoldása [9] és az egészértékű tételszám meghatározása volt [10, 2]. A [2] cikkben a szerzők egy meta-modellt vizsgáltak, amely hasonló reverz logisztikai problémák megoldásához nyújthat alapot.

Reverz logisztikai (javítási/újrafeldolgozási/recycling) modellt gazdasági sorozatnagyság modell (EOQ) feltételek mellett először Schrady [11] vizsgált. A dolgozatban az amerikai haditengerészet nagyértékű alkatrészeinek javítását és a javítással elérhető költségcsökkenést analizálta, a beszerzéssel szemben. A feltételezése az volt, hogy egy beszerzési tétel mellett mekkora legyen a javítási és beszerzési tételnagyság, és egyáltalán a javítási tételek száma mekkora legyen. Ezt a modellt Nahmias és Rivera [6] általánosította arra az esetre, amikor a javítási ráta véges, tehát a javítás időigényét is bevonta a modellbe. Egy másik általánosítás Mabini, Pintelon és Gelders [5] szerzőhármastól származik, akik Schrady modelljét többtermék esetére vizsgálták, tőkekorlát mellett. Ezen modellek a sorozatnagyságokra adtak zárt formulát, de a hulladékkezelést nem építették be a modellbe, és az egészértékűséget, valamint a visszaérkezési rátától való függést is negligálták. Teunter [12] egy Schrady-éhoz hasonló modellt analizált, de néhány hibával. Ennek a modellnek az az alapfeltevése, hogy a javítás/újrafeldolgozás és a termelés között egy hulladékkezelésnek kell történnie, tehát a hulladékkezelés, mint tevékenység szerepel a modellben. Egy másik feltételezés az, hogy a termelt jószág készletezési költsége nagyobb, mint az újrafeldolgozotté, ugyanis valószínűleg a termelés fajlagos költség magasabb, mint az újrafeldolgozásé. Ez a dolgozat azt is megengedi, hogy a termelési tételek száma nagyobb legyen mint egy. E cikk szerzői a modell hiányosságait az [1] dolgozatban korrigálták, és a három alapmodellt (általánosított Schrady, Richter és Teunter) összehasonlították. Azt a következtetést vonták le, hogy a három modell jóllehet más-más tartalmú, de ugyanahhoz a matematikai struktúrához vezetnek, amelyet a szerzők meta-modellnek neveznek. A három modellben a termelési-készletezési stratégia egy előre megadott mintát követ, vagyis a termelési és javítási tételnagyságok azonosak, amit azt a [3] dolgozat is észreveszi. Az optimális stratégiák keresése lehet egy következő kutatási irány.

A dolgozat célja, hogy a [7] modell további vizsgálata. A [2] dolgozatban a szerzők említést tesznek arról, hogy a termelési és javítási sorozatnagyságok száma nagyobb lehet, de konkrét feladatot nem mutatnak be, amelyre ez a tulajdonság teljesül. Néhány ponton egyszerűbb bizonyításokat adunk a tételekre, lemmákra, amivel az értelmezést megkönnyítjük.

A cikk az alábbiak szerint szerveződik. A második részben a modell működését mutatjuk be a használt paraméterekkel és változókkal. Utána a készletezési és teljes költségfüggvényeket konstruáljuk meg. A negyedik részben folytonos és egészértékű tételszámok esetére adjuk meg a modell optimális paramétereit (1. modell). A következő fejezet az egészértékű feladat optimális megoldását mutatja be (2. modell). A hatodik, utolsó rész az eredményeket foglalja össze.

2. Paraméterek és a rendszer működése

Legyen adott egy termelő vállalat, amely az alkatrészek üzemek közötti továbbításához szükséges konténereket maga állítja elő és a régebben előállított használtakat ugyanott javítja. Az előállítás és javítás ugyanabban a műhelyben történik. A konténerek iránti kereslet, amelyet egy másik műhely jelenít meg, feltételezések szerint időben konstans. A konténerekben alkatrészeket szállítanak a második üzembe további feldolgozásra. A második üzemnek tehát alkatrészre van kereslete, de azt a konténerekben, egységesített darabszámban szállítanak oda. Így a műhelynek nem csak alkatrészekre, hanem konténerekre is szüksége van áttételesen. Egy ehhez hasonló problémát Kelle és Silver [4] is vizsgált sztochasztikus dinamikus sorozatnagyság modellben, de csak az előállító műhely szintjén. A második üzem az üres konténereket gyűjti, raktározza, majd onnan az első üzem termelési-javítási ciklusának kezdetére az első üzembe szállítják. Nem minden konténert tudnak a második üzemből az elsőbe visszaszállítani, mert azok egy része a második üzemet hulladékként hagyja el. A hulladék arányáról a második üzem dönt, de arra az első üzem is befolyással van. A modell anyagáramlási folyamatát az 1. ábra mutatja. A termelt és javított konténerek közös raktárba kerülnek az első üzemben, ahonnan majd - egyenletes felhasználást feltételezve – alkatrészekkel megtelten kerülnek a második üzembe. A használt, de hulladékkezelésre át nem adott konténereket a második üzemben a második raktárban tárolják, ahonnan az egész állományt az első üzem harmadik raktárába szállítják a ciklus végén.

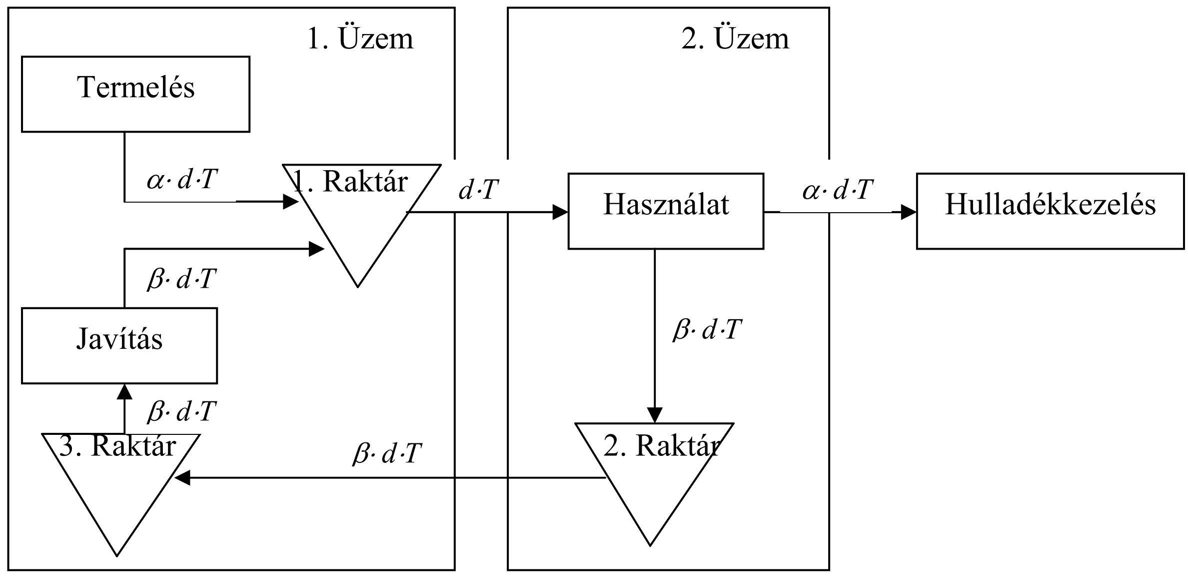
A modell paraméterei és változói következők lesznek.

A modell paraméterei:

- d keresleti ráta, időegységre eső darabszám,
- r fix javítási sorozatkezdési költség,
- s fix termelési sorozatkezdési költség,

- h a végtermék készlettartási költsége (1. raktár), időegységre per darab,
- u a javítandó termék készlettartási költsége (2. és 3. raktár), időegységre per darab,
- e egységnyi hulladék kezelési költsége,
- b egységnyi végtermék termelési költsége,
- k egységnyi javítandó termék javítási költsége.

1. Ábra. Anyagáramlás a modellben



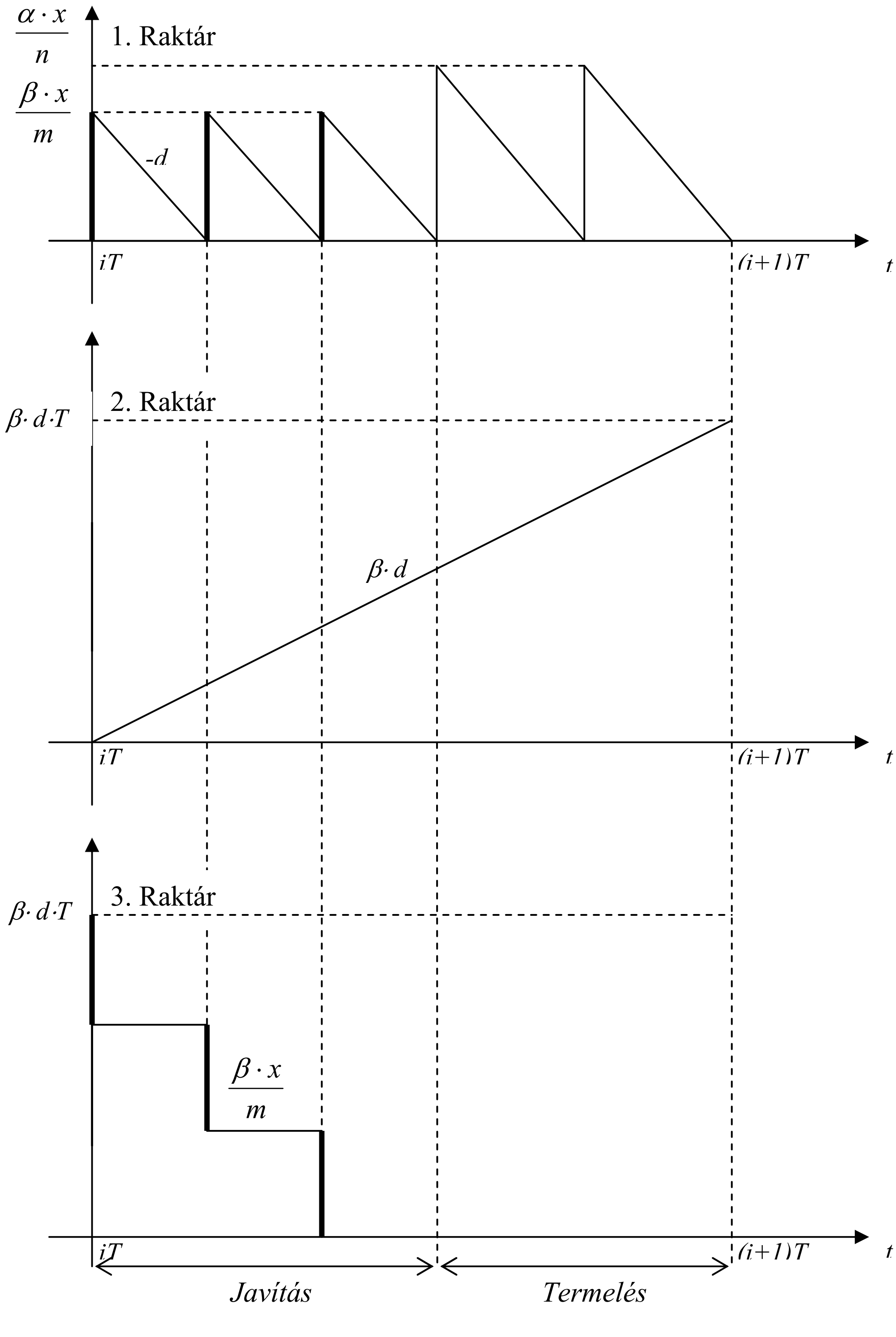
A modell döntési változói:

- T hulladékgyűjtési időtartam, a termelési-javítási ciklus hossza,
- x a teljes sorozatnagyság a termelési-javítási ciklusban, $x = d \cdot T$,
- m a javítási tételek száma, $m \geq 1$, egész,
- n a termelési tételek száma, $n \geq 1$, egész,
- α hulladékkezelési ráta, a d keresleti ráta százalékában, $\beta = 1 - \alpha$ a javítási ráta.

A modell további feltételezése az, hogy mind a termelési, mind a javítási sorozatnagyságok azonosak. Az x összes sorozatnagyság, vagyis a második üzem ciklusbeli kereslete alapján kiszámíthatóak a termelési és javítási sorozatnagyságok, amelyek a termelési sorozatnál $\frac{\alpha \cdot x}{n}$, míg a javítási sorozatnál $\frac{\beta \cdot x}{m}$. A készletszinteket a három raktárra a 2. ábra mutatja egy ciklusra.

A modell megalkotásánál eltekintünk attól, hogy a termelés/javítás időt vesz igénybe. Az első raktárba pillanatnyi gyors beáramlás történik, míg a kereslet időegységre konstans, így itt a klasszikus fűrészfog modell áll elő azzal a különbséggel, hogy a termelési és javítási sorozatnagyság különbözik. Ebből a raktárból akkor van kivételezés, ha készletállomány nullára csökken. A második raktárban csak egyenletes növekedés történik, míg a harmadik raktárból csak javításra vesznek ki egy-egy javítási sorozatnyi mennyiséget, de úgy, hogy az első sorozatot a raktárba való beérkezés pillanatában azonnal javítani kezdik, tehát az nem kerül készletezésre. Mindezt a kivételezést addig folytatják, míg a harmadik raktár állománya nullára nem csökken. A folyamat ciklusonként ismétlődik.

2. Ábra. Készletszintek a raktárakban az *i*-ik ciklusban ($m = 3$, $n = 2$, $i \geq 1$)



Könnyen látható, hogy az x keresletet az m darab azonos javítási és n darab azonos termelési tétellel elégítik ki. A modellt tehát az x teljes sorozatnagysággal, az m és n tételszámmal, mint irányítható változókkal írhatjuk le.

3. A költségfüggvények megszerkesztése

A készletezési alrendszer összköltségét a görbe alatti terület fajlagos költségekkel súlyozott összegeként határozzuk meg, amiből – a ciklusidővel osztva – a szokásos átlagos költségfüggvényt számíthatjuk ki. A következő lemma a raktárak cikluson belüli készlettartási összköltséget adja.

1. Lemma. Legyen a raktárak összes készlettartási költsége H_1, H_2 és H_3 az első, második és harmadik raktárra sorrendben. Ekkor

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{h}{2 \cdot d} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot x^2}{n} + \frac{h}{2 \cdot d} \cdot \frac{\beta^2 \cdot x^2}{m} \\
H_2 &= \frac{u}{2 \cdot d} \cdot \beta \cdot x^2 \\
H_3 &= \frac{u}{2 \cdot d} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \beta^2 \cdot x^2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Bizonyítás. Csak a harmadik raktárra mutatjuk meg az összefüggést, mert az 1. ábra alapján a másik két egyenlőség hasonlóan belátható. A görbe alatti területet a harmadik esetben a kövezkezőképpen számolhatjuk ki:

$$H_3 = u \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{d} \cdot \frac{\beta \cdot x}{m} \right) \cdot \left(i \cdot \frac{\beta \cdot x}{m} \right) = \frac{u}{d} \cdot \frac{\beta^2 \cdot x^2}{m^2} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} i \,,$$

ahol $\frac{1}{d} \cdot \frac{\beta \cdot x}{m}$ az időtartam két javítási tétel között, míg $i \cdot \frac{\beta \cdot x}{m}$ a készletállomány az $(m - i)$-edik tétel után. A természetes számok összegzését felhasználva kapjuk az eredményt.

A sorozatkezdési költségek összege: $m \cdot r + n \cdot s$. Az készletezési összköltség K_z így a sorozatkezdési és készlettartási költségek összegeként írható fel a következő formában:

$$K_z = (m \cdot r + n \cdot s) + \frac{x^2}{2 \cdot d} \left[h \cdot \frac{\alpha^2}{n} + (h - u) \cdot \frac{\beta^2}{m} + u \cdot \left(\beta + \beta^2 \right) \right].$$

A készletezési átlagköltséget ennek ismeretében könnyen meghatározhatjuk alkalmazva azt az összefüggést, hogy a teljes sorozatnagyság egyenlő a ciklusbeli kereslettel ($x = d \cdot T$):

$$K(x, m, n, \alpha) = \frac{K_z}{T} = (m \cdot r + n \cdot s) \cdot \frac{d}{x} + \frac{x}{2} \left[h \cdot \frac{\alpha^2}{n} + (h - u) \cdot \frac{\beta^2}{m} + u \cdot \left(\beta + \beta^2 \right) \right]. \tag{2}$$

Az első feladattípus a készletezési átlagköltség minimalizásása lehet. Ekkor arra a kérdésre keressük a választ, hogy mely teljes sorozatnagyságra (x), javítási és termelési tételszámra (m, n) és hulladékkezelési rátára (α) lesz a készletezési költség minimális és milyen ajánlás fogalmazható meg ezek ismeretében a környezettudatos vállalati termelési-készletezési stratégiára.

Vonjuk most be a vizsgálatba a sorozatnagysághoz kapcsolódó költségeken kívül a lineáris termelési, újrafeldolgozási és hulladékkezelési költségeket. Jelöljük ezen költségeket az $R(\alpha)$ függvénnyel. E költségekre csak az átlagköltségeket írjuk fel, mert az az x teljes tételnagyságtól nem függ, csak a hulladékkezelési rátától.

$$R(\alpha) = b \cdot d \cdot \alpha + k \cdot d \cdot \beta + e \cdot d \cdot \alpha = d \cdot [\alpha \cdot (b + e - k) + k]$$

A teljes (készletezési és lineáris) átlagköltségek így

$$G(x,m,n,\alpha)=K(x,m,n,\alpha)+R(\alpha).$$

Két problémát fogunk a cikk folyamán vizsgálni:

1. Modell: A készletezési átlagköltségek minimalizálása

$$\begin{aligned}&K(x,m,n,\alpha)\to \min\\ &x>0,\quad m,n\in\{1,2,...\}\end{aligned}.$$

2. Modell: Az összes átlagköltségek minimalizálása

$$\begin{aligned}&G(x,m,n,\alpha)\to \min\\ &x>0,\quad m,n\in\{1,2,...\},\quad \alpha\in[0,1]\end{aligned}.$$

A következő részben az 1. modell megoldását adjuk meg.

4. Az 1. modell megoldása

Ebben a modellben feltételezzük, hogy az α hulladékkezelési ráta állandó. A modell paramétereit, vagyis a teljes tételnagyságot és a tételszámokat szekvenciálisan határozzuk meg. Célunk az α-tól függő költségfüggvény meghatározása. A megoldásban először feltesszük, hogy a tételszámok folytonos változók, majd azután vizsgáljuk a szigorúbb egészértékűséget.

4.1. Az optimális teljes tételnagyság és a minimális költségek adott tételszámok mellett

A (2) költségfüggvény konvex és differenciálható x-ben. Ekkor a megoldás

$$x(m,n,\alpha)=\sqrt{\frac{2\cdot d\cdot(m\cdot r+n\cdot s)}{h\cdot\frac{\alpha^2}{n}+(h-u)\cdot\frac{\beta^2}{m}+u\cdot(\beta+\beta^2)}}. \tag{3}$$

1. példa. Legyen *s = 1450, r = 200, h = 650, u = 5, α = 0,8 (β = 0,2), d = 1000, m = 2* és végül *n = 3*. Ezen adatokra az optimális teljes sorozatnagyság a (3) összefüggést alkalmazva *x(2, 3, 0,8) = 249*. A termelési sorozatnagyság *0,8 · x(2, 3, 0,8) / 3 = 66,5* míg a javítási sorozatnagyság értéke *0,2 · x(2, 3, 0,8) / 2 = 25* lesz. A készletezési költségek értéke *K(249, 2, 3, 0,8) = 38.095,7* pénzegység.

A (3)-at (2)-be helyettesítve az egyszerűsített költségfüggvény

$$K(m,n,\alpha)=\sqrt{2\cdot d\cdot(m\cdot r+n\cdot s)\cdot\left[h\cdot\frac{\alpha^2}{n}+(h-u)\cdot\frac{\beta^2}{m}+u\cdot(\beta+\beta^2)\right]}.$$

A fenti függvényben végezzük el a műveleteket, amivel az alábbi probléma adódik:

$$K(m,n,\alpha)=\sqrt{2\cdot d\cdot\left[A(\alpha)\cdot\frac{m}{n}+B(\alpha)\cdot\frac{n}{m}+C(\alpha)\cdot m+D(\alpha)\cdot n+E(\alpha)\right]},$$

ahol

$$A(\alpha)=r\cdot h\cdot\alpha^2,\quad B(\alpha)=s\cdot(h-u)\cdot\beta^2,\quad C(\alpha)=r\cdot u\cdot\left(\beta+\beta^2\right),$$
$$D(\alpha)=s\cdot u\cdot\left(\beta+\beta^2\right),\quad E(\alpha)=s\cdot h\cdot\alpha^2+r\cdot(h-u)\cdot\beta^2$$

Legyen továbbá $S(m,n,\alpha)=A(\alpha)\cdot\frac{m}{n}+B(\alpha)\cdot\frac{n}{m}+C(\alpha)\cdot m+D(\alpha)\cdot n+E(\alpha)$. (4)

Mivel a gyökvonás egy monoton transzformáció, ezért elegendő az *S(m,n,α)* függvényt minimalizálni az *m* és *n* tételszámokban, amelyek pozitív egész számok.

2. példa. Legyen továbbra is *s = 1450, r = 200, h = 650, u = 5, α = 0,8 (β = 0,2), d = 1000.* Ekkor az együtthatók értéke: *A(0,8) = 83.200, B(0,8) = 37.410, C(0,8) = 240, D(0,8) = 17.400* és *E(0,8) = 608.360.* A (4) függvény ezen értékekre a következő alakot veszi fel: $S(m,n,0{,}8)=83.200\cdot\frac{m}{n}+37.410\cdot\frac{n}{m}+240\cdot m+17.400\cdot n+608.360$.

4.2. Az optimális folytonos tételszámok meghatározása

A tételszámok meghatározásához a következő segédfeladatot vezetjük be:

$$\begin{aligned}&S(m,n)=A\cdot\frac{m}{n}+B\cdot\frac{n}{m}+C\cdot m+D\cdot n+E\to\min\\&m,n\geq 1\end{aligned}. \quad (5)$$

Itt feltehető, hogy az *A, C, D* és *E* paraméterek pozitívak, és a *B+D* összeg is, amelyek teljesülnek a (4) függvény együtthatóira. Ez a segédfeladat az eredeti probléma egy relaxált feladata arra az esetre, amikor a tételszámok egynél nagyobb folytonos változók. A feladat matematikai analízisét a szerzők a [2] cikkben adták meg, ahol bizonyították pl., hogy a segédfeladat célfüggvénye kvázikonvex. A következő tétel a folytonos megoldást szolgáltatja.

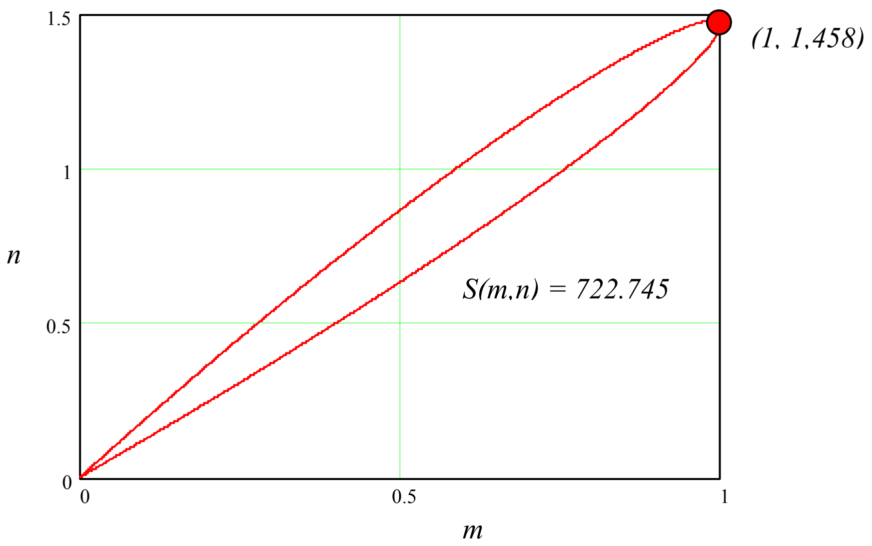
1. Tétel [8]. Az optimális folytonos *(m,n)* értékek és a hozzájuk tartozó minimális költségek:

(i)	$B\geq A+C$	$(m^o,n^o)=\left(\sqrt{\frac{B}{A+C}},1\right)$,	$S=2\sqrt{B(A+C)}+D+E$,
(ii)	$A-D\leq B\leq A+C$	$(m^o,n^o)=(1,1)$,	$S=A+B+C+D+E$,
(iii)	$A\geq B+D$	$(m^o,n^o)=\left(1,\sqrt{\frac{A}{B+D}}\right)$,	$S=2\sqrt{A(B+D)}+C+E$.

Ezt a tételt nem bizonyítjuk be. Számos újrafelhasználási modell is az (5) problémához, és annak az 1. tételben megadott megoldásához vezet [1]. Ezért ezt a feladatot e cikk szerzői meta-modellnek nevezik [2].

3. példa. Legyen most $A = 83.200$, $B = 37.410$, $C = 240$, $D = 17.400$ és $E = 608.360$. Ekkor $A > B + D = 39.150$, ami azt jelenti, hogy $m^o = 1$ és $n^o = 1,458$. Az célfüggvény értéke ebben a pontban $S(1,\ 1,458) = 722.745$ lesz. A feladat egyenlőköltség-görbéjét a 3.ábra szemlélteti.

3. Ábra. A feladat *S(m,n)* egyenlőköltség-görbéje



Az 1. tétel segítségével (4) feladat megoldása folytonos tételszámok mellett:

2. Tétel [8]. A (2) feladat és ezzel az 1. modell optimális folytonos megoldása a teljes tételnagyságra $x^o(\alpha)$ és a tételszámokra $(m^o(\alpha), n^o(\alpha))$, valamint a hozzájuk tartozó $K(\alpha)$ költségfüggvény:

(i) $\{h > u\} \wedge \{\alpha = 0\}$

$$m^o(0) = 1, \quad n^o(0) = 0,$$
$$x^o(0) = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot r}{h + u}},$$
$$K(0) = \sqrt{2 \cdot d \cdot (h + u)}$$

(ii) $\{s \cdot (h - u) \cdot \beta^2 > r \cdot h \cdot \alpha^2 + r \cdot u \cdot (\beta + \beta^2)\} \wedge \{h > u\} \Rightarrow \alpha \in (0, \alpha_1)$

$$m^o(\alpha) = \beta \cdot \sqrt{\frac{s \cdot (h - u)}{r \cdot [h \cdot \alpha^2 + u \cdot (\beta + \beta^2)]}}, \quad n^o(\alpha) = 1,$$
$$x^o(\alpha) = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot s}{h \cdot \alpha^2 + u \cdot (\beta + \beta^2)}},$$
$$K(\alpha) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left\{\beta \cdot \sqrt{r \cdot (h - u)} + \sqrt{s \cdot [h \cdot \alpha^2 + u \cdot (\beta + \beta^2)]}\right\}$$

(iii) $\{s \cdot (h - u) \cdot \beta^2 \le r \cdot h \cdot \alpha^2 + r \cdot u \cdot (\beta + \beta^2)\} \wedge \{r \cdot h \cdot \alpha^2 \le s \cdot (h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta)\} \Rightarrow \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$m^o(\alpha) = 1, \quad n^o(\alpha) = 1,$$
$$x^o(\alpha) = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot (r + s)}{h \cdot \alpha^2 + h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta}},$$
$$K(\alpha) = \sqrt{2 \cdot d \cdot (r + s) \cdot (h \cdot \alpha^2 + h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta)}$$

(iv) $r \cdot h \cdot \alpha^2 > s \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right) \Rightarrow \alpha \in (\alpha_2, 1)$

$$m^o(\alpha) = 1, \quad n^o(\alpha) = \alpha \cdot \sqrt{\frac{r \cdot h}{s \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}},$$

$$x^o(\alpha) = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot r}{h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta}}$$

$$K(\alpha) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right]$$

(v) $\alpha = 1$

$$m^o(1) = 0, \quad n^o(1) = 1,$$

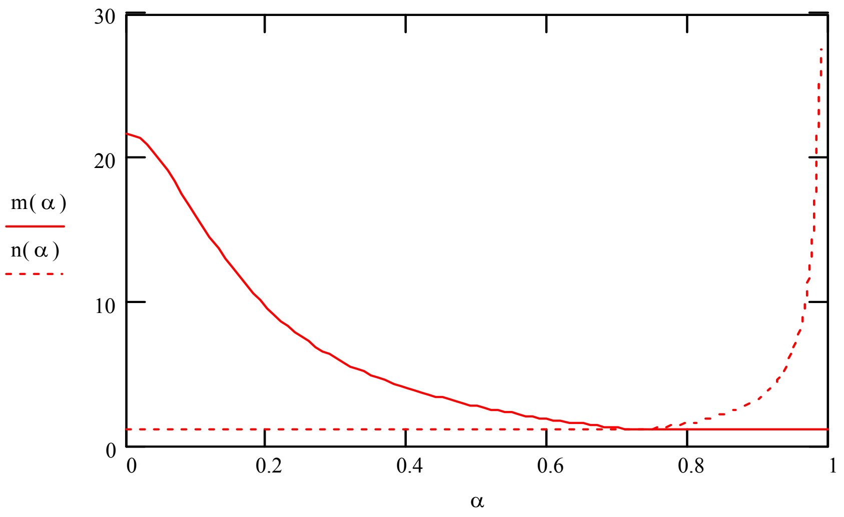
$$x^o(1) = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot s}{h}} \quad .$$

$$K(1) = \sqrt{2 \cdot d \cdot s \cdot h}$$

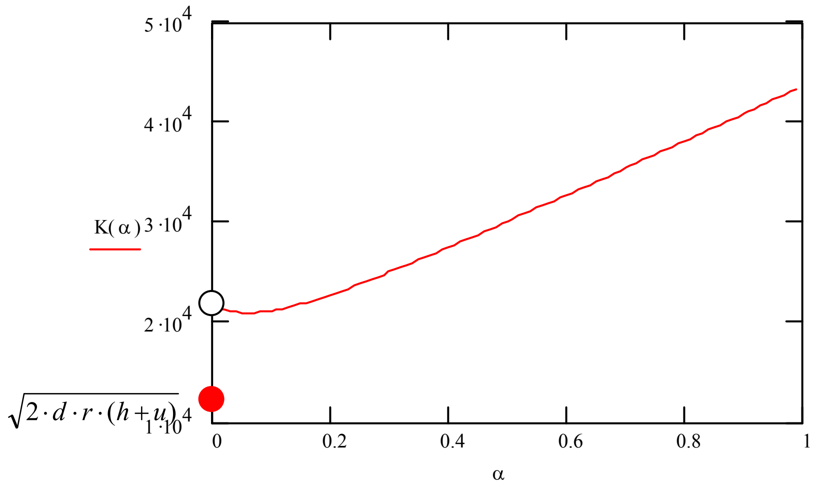
Ezt a tételt sem bizonyítjuk, mert egyszerű behelyettesítéssel és nagy türelemmel az eredmények adódnak. Ha $h < u$ teljesülne, akkor az (i) és (ii) feltételek melletti megoldás nem létezik, így ebben az esetben $m(\alpha)$ értéke minden egyes α-ra egy. A továbbiakban tekintsünk el ettől az esettől. Az α_1 és α_2 létezésének bizonyításától is ($0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$) eltekintünk most. A [8] dolgozatban megtalálhatóak a részletek. Arra hívjuk még fel az olvasó figyelmét, hogy a szélső értékekben, vagyis amikor a hulladékezelési ráta nulla, vagy egy, az eredmények értelmezhetőek, amit a tétel magában foglal. Ha a hulladékkezelési rára nulla, akkor az összes konténer visszatér javításra, így termelésre nincs szükség. Ebben a pontban a kiszámított költségfüggvény nem folytonos jobbról, tehát ott szakadása van. Amennyiben a hulladékkezelési ráta egy, akkor minden második műhelybe beérkező konténert hulladékként kezelnek, ezért nem kerül sor javításra. Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhet az olvasó arról, hogy ebben a pontban a költségfüggvény folytonos balról, tehát elvileg az $\alpha = 1$ helyettesítéssel a költségfüggvényből kiszámolható a minimális költség. E két esetben a minimális költség melletti a feladat a tételszámokra az optimális egészértékű megoldást nyújtja. Ezenkívül bizonyos α értékekre is egészértékű lesz a folytonos megoldás a triviális $[\alpha_1, \alpha_2]$ szakaszon kívül, amikor a javítási és termelési tételszám is egyenlő eggyel.

4. példa. Tekintsük újra a 2. példa adatait: $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $d = 1000$. Ebben az esetben $h > u$, így a 2. tételben megadott öt eset mindegyike előfordul. Ekkor $\alpha_1 = 0{,}728$ és $\alpha_2 = 0{,}732$, tehát e két hulladékkezelési ráta között a tételszámok egyenlőek eggyel, vagyis $m(\alpha) = n(\alpha) = 1$. A tételszámokat a hulladékkezelési ráta függvényében a 3. ábra mutatja. A $K(\alpha)$ költségfüggvényt a 4. ábrán mutatjuk be. Az $\alpha = 0$ pontban ez a függvény nem folytonos, a $K(0)$ értéke 161.864.

4. Ábra. A tételszámok a hulladékkezelési ráta függvényében, $\alpha \in (0,1)$



5. Ábra. A $K(\alpha)$ költségfüggvény a $[0,1]$ intervallumon



Jellemezzük most a $K(\alpha)$ költségfüggvényt. Ezt a következő lemma mondja ki.

2. Lemma [8]. A $K(\alpha)$ költségfüggvény (i) konvex a $(0,\alpha_1)$ intervallumon ($h > u$), (ii) pontosan akkor konvex a $[\alpha_1,\alpha_2]$ intervallumon, ha $4 \cdot h \cdot (h + u) \geq u^2$, (iii) konkáv a $(\alpha_2,1)$ intervallumon és folytonosan differenciálható a $(0,1)$ minden pontjában.

A lemma bizonyítását az olvasóra hagyjuk, azt némi számolással egyszerűen megkaphatjuk. A lemmából is látható, hogy ha a $h > u$ összefüggés tartható, vagyis a termelt konténerek készlettartási költsége nagyobb, mint a javított konténereké, akkor a költségfüggvény két részből áll a $(0,1)$ intervallumon: a $(0,\alpha_2]$ intervallumban konvex, míg a $(\alpha_2,1)$ szakaszon konkáv.

A költségfüggvényre is adhatunk alsóhatárt.

3. Lemma. A következő összefüggés minden $\alpha \in [0,1]$ hulladékezelési rátára teljesül:

$$K(\alpha) \geq \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right].$$

Bizonyítás. Induljunk ki abból, hogy

$$K(\alpha) = K\left(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha\right) =$$
$$\sqrt{2d\left\{\left[\sqrt{A(\alpha)\frac{m^o(\alpha)}{n^o(\alpha)}} - \sqrt{n^o(\alpha)\left(\frac{B(\alpha)}{m^o(\alpha)} + D(\alpha)\right)}\right]^2 + 2\sqrt{A(\alpha)\left[B(\alpha) + D(\alpha)\cdot m^o(\alpha)\right]} + C(\alpha)m^o(\alpha) + E(\alpha)\right\}} \geq$$
$$\sqrt{2d\left\{2\sqrt{A(\alpha)\cdot\left[B(\alpha) + D(\alpha)\right]} + C(\alpha) + E(\alpha)\right\}}$$

Az egyenlőtlenséget azért írhatjuk, mert a négyzetes kifejezés nemnegatív, így a gyökjel alatti kifejezést azzal csökkenthetjük. A fennmaradó rész monoton növekvő függvénye az *m(α)* változónak, így az egy értéket véve egy alsóbecslést kapunk a költségfüggvényre. A kapott becslés független az α megválasztásától. Az átalakításokat elvégezve, a lemma állítását nyerhetjük. Ez teljesül az intervallumunk szélső értékeire is, vagyis a nulla és egy pontokra is, amit egyszerű behelyettsítéssel ellenőrízhetünk.

A lemma következménye az, hogy a költségfüggvényt alulról közelíthetjük egy konkáv függvénnyel, amit viszont egy lineáris függvénnyel közelíthetünk alulról:

$$K(\alpha) \geq \sqrt{2\cdot d}\cdot\left[\alpha\cdot\sqrt{s\cdot h} + \sqrt{r\cdot\left(h\cdot\beta^2 + u\cdot\beta\right)}\right] \geq \sqrt{2\cdot d}\cdot\left[\alpha\cdot\sqrt{s\cdot h} + \beta\cdot\sqrt{r\cdot(h+u)}\right].$$

Mindez azt mutatja, hogy a készletezési költségfüggvényre teljesül az alábbi összefüggés:

$$K(\alpha) \geq \min\left\{\sqrt{2\cdot d\cdot s\cdot h}; \sqrt{2\cdot d\cdot r\cdot(h+u)}\right\},$$

amiből az következik, hogy a költségfüggvény alsó korlátja a tiszta stratégiák közül az egyik, vagyis a kereslet kielégítése csak termelésből javítás nélkül, vagy a keresletkielégítés hulladékkezelés és termelés nélkül csak javítással. Nem tűztük ki célul a készletezési költségek minimalizálását, így ezt a becslést nem tekintjük egy optimalizálási feladat megoldásának. Erre a becslésre a teljes költségek minimalizálásakor lesz szükségünk.

5. példa. A 4. példa esetén $K(\alpha) \geq \min\{161.864; 434.166\} = 161.864 = K(0)$, vagyis a készletezési költségek minimális értékénél minden használt konténer javításra visszakerül javításra.

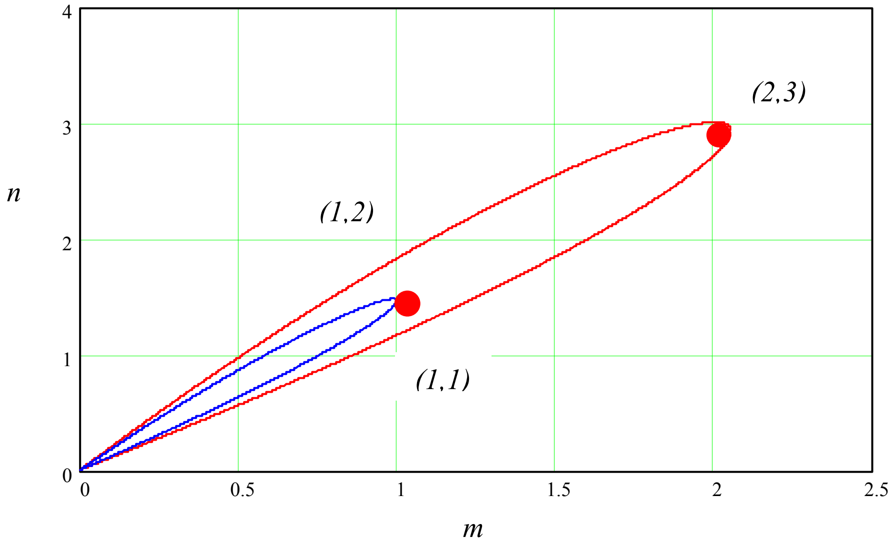
4.3. Az optimális egészértékű tételszámok meghatározása

Tekintsük most mindazon α hulladékkezelési rátákat, amelyekre a folytonos megoldás nem szolgáltat egészértékű tételszámokat. A kérdés most úgy hangzik, hogy az optimális egészértékű megoldás a határvonalon fekszik-e ($n^I(\alpha) = 1$ vagy $m^I(\alpha) = 1$), vagy a megengedett tartomány belsejében ($n^I(\alpha) > 1$ és $m^I(\alpha) > 1$). A következő példa rámutat arra, hogy az optimális egészértékű megoldás a megengedett taromány belsejébe eshet.

6. példa. Legyen ismét $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $\alpha = 0{,}8$ $(\beta = 0{,}2)$, $d = 1000$. Erre az esetre a folytonos megoldást a 3. példában állítottuk elő. A folytonos tételszámok $m(0{,}8) = 1$ és $n(0{,}8) = 1{,}458$, amire $K(m(0{,}8),n(0{,}8),0{,}8) = 38.019{,}6$. A határvonalon fekvő megoldások $m^I_1(0{,}8) = 1$, $n^I_1(0{,}8) = 1$ és $m^I_2(0{,}8) = 1$, $n^I_2(0{,}8) = 2$. A költségfüggvényértékei: $K(m^I_1(0{,}8),n^I_1(0{,}8),0{,}8) = 38.234{,}8$ és $K(m^I_2(0{,}8),n^I_2(0{,}8),0{,}8) = 38.170{,}7$. Ugyanakkor, ha $m^o = 2$ és $n^o = 3$, akkor $K(2,3,0{,}8) = 38.095{,}7$. Mivel $K(2,3,0{,}8) < K(m^I_2(0{,}8),n^I_2(0{,}8),0{,}8) <$

$K(m^I{}_1(0,8),n^I{}_1(0,8),0,8)$, ezért az optimális egészértékű megoldás a megengedett tartomány belsejébe esik. A tartomány belsejébe eső megoldás költsége 0,197 százalékkal alacsonyabb, mint a határvonalon fekvő megoldások közül az alacsonyabb, vagyis $m^I{}_2(0,8) = 1$, $n^I{}_2(0,8) = 2$. Az egyenlőköltség-görbékkel előállított megoldást a 6. ábra szemlélteti.

6. Ábra. Egészértékű megoldás a tartomány belsejében



Nevezzük *határmegoldás*nak az optimális egészértékű megoldásnak azt a becslését, amelyre a tételszámok a folytonos megoldáshoz legközelebb eső egészértékek. Jelöljük ezeket a becsléseket $(m^b(\alpha),n^b(\alpha))$-val. A határmegoldásokat formálisan a következőképpen határozhatjuk meg:

3. Tétel [2]. A javítási és hulladékkezelési modell határmegoldásai

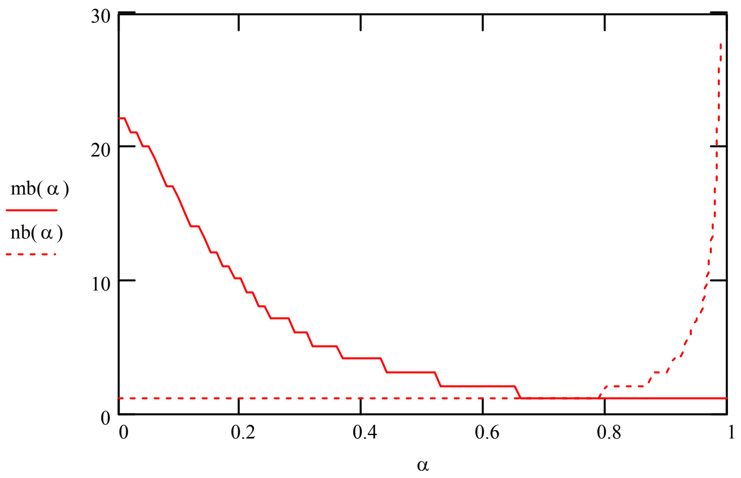
(i) $\quad (0,\alpha_1) \Rightarrow m^b(\alpha) = \left\lfloor \sqrt{\dfrac{A(\alpha)}{B(\alpha)+D(\alpha)}+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2} \right\rfloor, \quad n^b(\alpha)=1,$

(iii) $\quad (\alpha_2,1) \Rightarrow m^b(\alpha)=1, \quad n^b(\alpha) = \left\lfloor \sqrt{\dfrac{B(\alpha)}{A(\alpha)+C(\alpha)}+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2} \right\rfloor,$

ahol $\lfloor x \rfloor$ a legnagyobb x-nél kisebb egészszámot jelöli.

Ez a tétel azt mondja ki, hogy ha a folytonos megoldásban az egyik tételszám egy, akkor azt hagyjuk, mert egy egyészszámhoz "az van a legközelebb", de ha nem egész a másik, akkor azt „kerekítsük" lefelé, vagy felfelé, annak a függvényében, hogy melyik egészszámhoz esik közelebb. Könnyen bebizonyítható (lásd [2]), hogy pl., ha egy $S(1,\ 4{,}4,\alpha)$ esetén az n-re a négy kisebb függvényértéket ad, mint az öt, így a $K(1,\ 4{,}4,\alpha)$ költségértékre is. A 7. ábrán szemléltetjük a határmegoldásokat a 6. példa paramétereivel.

7. Ábra. A határmegoldások a hulladékkezelési ráta függvényében



A következő lemma szükséges feltételt mond ki arra vonatkozólag, hogy az egészértékű optimum mikor lesz automatikusan határmegoldás.

Lemma 4 [2]. Tegyük fel, hogy a folytonos $(m^o(\alpha),n^o(\alpha))$ megoldás nem egészértékű. Ekkor az $(m^b(\alpha),n^b(\alpha))$ határmegoldás egyben optimális is $((m^b(\alpha),n^b(\alpha))=(m^I(\alpha),n^I(\alpha)))$, ha (i) $\alpha\in(0,\alpha_1)$ esetén $49\cdot A(\alpha)\leq 527\cdot C(\alpha)$ vagy ha (iii) $\alpha\in(\alpha_2,1)$ esetén $49\cdot B(\alpha)\leq 527\cdot D(\alpha)$.

A bizonyítást itt is elhagyjuk, csak a bizonyításban adott felső határt adjuk meg az (i) esetre, vagyis amikor a termelési tételszám nagyobb, mint egy. (Hasonló szimmetrikus becslést adhatunk a másik oldalra is.) Ekkor

$$S\left(1,n^b(\alpha),\alpha\right)\leq\frac{13}{6}\cdot\sqrt{A(\alpha)\cdot\left[B(\alpha)+D(\alpha)\right]}+C(\alpha)+E(\alpha). \tag{6}$$

Jelölje most $S(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha)$ az optimális egészértékű megoldást, amely a megengedett tartomány belsejében feküdhet, és $S(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha)$ a határmegoldást. A kérdésünk úgy hangzik, hogy mennyi a relatív hibája a két megoldásnak.

4. Tétel. A határmegoldás relatív hibája a következő:

$$dS_I=\frac{S\left(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha\right)-S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}{S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}\leq\frac{1}{24}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\alpha\in(\alpha_2,1)$, vagyis $n^b(\alpha)>1$. Ekkor

$$S(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha)-S(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha)\leq S(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha)-S(m^o(\alpha),n^o(\alpha),\alpha),$$

és így

$$\frac{S\left(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha\right)-S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}{S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}\leq\frac{S\left(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha\right)-\left\{2\cdot\sqrt{A(\alpha)\cdot\left[B(\alpha)+D(\alpha)\right]}+C(\alpha)+E(\alpha)\right\}}{2\cdot\sqrt{A(\alpha)\cdot\left[B(\alpha)+D(\alpha)\right]}+C(\alpha)+E(\alpha)}$$

ahol

$$S\left(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha\right) = 2 \cdot \sqrt{A(\alpha) \cdot [B(\alpha) + D(\alpha)]} + C(\alpha) + E(\alpha) = \left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right]^2$$

A (6) becslés ismeretében: $dS_I \le \frac{1}{12} \frac{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} \cdot \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}}{\left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right]^2}$. Azonban egyszerű közelítéssel $\frac{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} \cdot \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}}{\left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right]^2} \le \frac{1}{2}$, amivel a tételt bizonyítottuk. Szimmetrikus érveléssel bizonyítható az állítás az $\alpha \in (0, \alpha_I)$, vagyis $m^b(\alpha) > 1$ esetre is.

A [2] dolgozatban azt láttuk be, hogy a relatív hiba kisebb *1/24*-nél. A következő tételben a költségfüggvényre adunk egy becslést.

5. Tétel. A határmegoldás készletezési költségének relatív hibája a következő:

$$dK_I = \frac{K\left(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha\right) - K\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)}{K\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)} \le \frac{1}{48}.$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk a dK_I különbséget. Mivel $K\left(m(\alpha), n(\alpha), \alpha\right) = \sqrt{2 \cdot d \cdot S\left(m(\alpha), n(\alpha), \alpha\right)}$, ezért

$$dK_I = \frac{\sqrt{2 \cdot d \cdot S\left(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha\right)} - \sqrt{2 \cdot d \cdot S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)}}{\sqrt{2 \cdot d \cdot S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)}} =$$

$$= \frac{S\left(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha\right) - S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)}{\sqrt{S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)} \cdot \left[\sqrt{S\left(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha\right)} + \sqrt{S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)}\right]} \le$$

$$\le \frac{S\left(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha\right) - S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)}{2 \cdot S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)} \le \frac{1}{48}$$

ami bizonyítja az állítást.

Amint a bizonyítás menetéből kiderült, nem csak az láttuk be, hogy a határ- és az optimális egészértékű megoldás relatív hibája *1/48*, hanem azt is, hogy a határ megoldás és a folytonos megoldás különbsége is ennyi. A tétel azt mondja ki, hogy a határmegoldásnak és az optimális egészértékű megoldásnak a költségkülönbözete nem haladja meg az 2.1 százalékot. Ezzel kapcsolatban felmerülhet a kérdés, hogy ne álljon-e meg az optimum keresése a határmegoldásnál, amelynél az egyik tételszám egyenlő eggyel. Ezzel az eredménnyel áttérhetünk a 2. modell vizsgálatára.

Ha az optimális tételszámokat meghatároztuk, akkor a hulladékkezelési ráta ismeretében a $K(\alpha)$ függvényt meghatározhatjuk:

$$K^I(\alpha) = \sqrt{2 \cdot d \cdot \left[A(\alpha) \cdot \frac{m^I(\alpha)}{n^I(\alpha)} + B(\alpha) \cdot \frac{n^I(\alpha)}{m^I(\alpha)} + C(\alpha) \cdot m^I(\alpha) + D(\alpha) \cdot n^I(\alpha) + E(\alpha)\right]}.$$

5. Az 2. modell megoldása

A 2. modellnél feltételezzük, hogy az α hulladékezelési ráták ismeretében adottak a tételnagysághoz tapadó változók értékei, így az egészértékű tételszámok is. A problémát ekkor a

$$G(\alpha) = K^I(\alpha) + R(\alpha) \to \min$$
$$\alpha \in [0,1]$$

formában írhatjuk fel. Mivel az egészértékű megoldás magasabb költséget eredményez, mint a folytonos megoldás, ezért a $G(\alpha)$ függvényre a következő becslést tehetjük:

$$G(\alpha) = K^I(\alpha) + R(\alpha) \geq K(\alpha) + R(\alpha).$$

A 3. lemma alapján a $K(\alpha)$ költségfüggvényre becslést végezhetünk, és az $R(\alpha)$ tételnagyságtól nem függő lineáris költségfüggvényt ismerjük. Így

$$K(\alpha) + R(\alpha) \geq \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right] + b \cdot d \cdot \alpha + k \cdot d \cdot \beta + e \cdot d \cdot \alpha\,,$$

ami konkáv függvény az értelmezési tartományában. További becsléssel

$$G(\alpha) \geq \alpha \cdot d \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot h}{d}} + b + e\right) + \beta \cdot d \cdot \left[\sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot (h+u)}{d}} + k\right] \geq$$
$$\geq \min\left\{d \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot h}{d}} + b + e\right);\ \ d \cdot \left[\sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot (h+u)}{d}} + k\right]\right\},$$

amivel bebizonyítottuk a

6. Tételt [9, 10]. Az optimumban a döntéshozó két stratégia közül választhat: $\alpha^o = 0$, vagy $\alpha^o = 1$. Ez azt jelenti, hogy a tiszta stratégiák egyike mellett (az összes termék javítása, hulladékkezelés nélkül; vagy az összes konténer letermelése javítás nélkül) lesznek a releváns költségek a legalacsonyabbak.

A hulladékezelés e költségtényezője változtatásával lehet a vállalatok tevékenységét a környezettudatos anyaggazdálkodás irányába terelni.

7. példa. Legyen újra $s = 1450,\ r = 200,\ h = 650,\ u = 5,\ e = 100,\ b = 250,\ k = 150,\ d = 1000$. Ekkor $G(0) = d \cdot \left[\sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot (h+u)}{d}} + k\right] = 166.186$ és $G(1) = d \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot h}{d}} + b + e\right) = 393.417$, vagyis optimális minden használt konténert újrafeldolgozni, $\alpha^o = 0$. A gazdasági sorozatnagyság értéke *25* darab.

6. Összefoglalás

A dolgozatban egy javítási és hulladékkezelési modellt mutattunk be. A probléma optimális készletezési paramétereit határoztuk meg először adott hulladékkezelési ráta mellett, majd a hulladékezelési rátát is döntési változónak tekintve egy lineáris költségekkel kiterjesztett modellben beláttuk, hogy költségszempontból a tiszta stratégiák dominánsak. Ennek az lehet a praktikus következménye, hogy a költségek változásával lehet a tisztán gazdasági racionalitás alapján álló vállalatokat környezettudatosabb gazdálkodásra (újrafelhasználás) bírni.

Irodalom

[1] Dobos, I., Richter, K. (1999): Comparison of Deterministic One-Product Reverse Logistics Models, in: Hill, R., Smith, D. (Eds.): Inventory Modelling: A Selection of Research Papers Presented at the Fourth ISIR Summer School (1999), Exeter 1999, 69-78

[2] Dobos, I., Richter, K. (2000): The integer EOQ repair and waste disposal model – further analysis. Central European Journal of Operations Research 8, 173-194

[3] Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J.M., Dekker, R., van der Laan, E. van Nunen, J.A.E.E., van der Wassenhove, L.N. (1997): Quantitative models for reverse logistics: a review. European Journal of Operational Research 103, 1-17

[4] Kelle, P., Silver, E.A. (1989): Purchasing policy of new containers considering the random returns of previously issued containers, IIE Transactions 21(4): 349-354

[5] Mabini, M.C., Pintelon, L.M., Gelders, L.F. (1998): EOQ type formulation for controlling repairable inventories. International Journal of Production Economics 54, 173-192

[6] Nahmias, N., Rivera, H: (1979): A deterministic model for repairable item inventory system with a finite repair rate. International Journal of Production Research 17(3), 215-221

[7] Richter, K. (1996): The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers, European Journal of Operational Research 96, 313-324

[8] Richter, K. (1996): The extended EOQ repair and waste disposal model, International Journal of Production Economics 45, 443-447

[9] Richter, K. (1997): Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem, OR Spektrum 19, 123-129

[10] Richter, K. Dobos, I. (1999): Analysis of the EOQ repair and waste disposal model with integer setup numbers, International Journal of Production Economics 59, 463-467

[11] Schrady, D.A. (1967): A deterministic inventory model for repairable items. Naval Research Logistic Quarterly 14, 391-398

[12] Teunter, R.H. (1998): Economic ordering quantities for repairable/manufacturable item inventory systems, Preprint No. 31, Faculty of economics and Management, Otto-von-Guericke University of Magdeburg, Germany